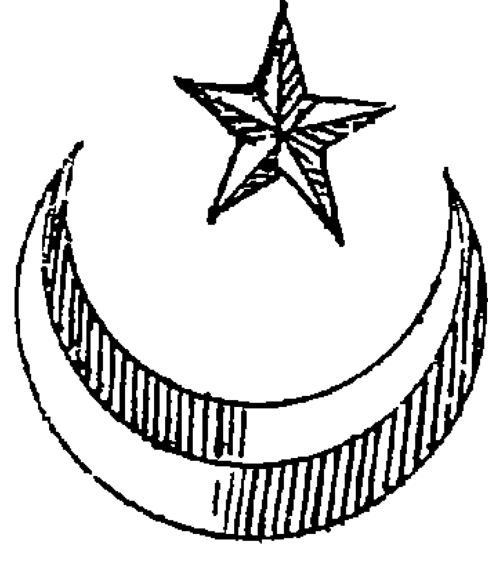


دروس الديناميك

الجاري تدريسها لتلامذة السنة الثانية من مدرسة المهندسخانه الخديويه
بمعرفة
حضرة أحمد بك زهنى
ناظر المدرسة

على حسب الجداول التفصيلية للعلوم الجارى تدريسها بمدرسة المهندسخانه الخديويه الصادر عليها قرار نظارة المعارف العمومية فى ٣٠ اغسطس سنة ١٨٩٤ المجعولة ذيلا لقانون المدرسة المذكورة المصدق عليه من مجلس النظار فى ٨ يونية سنة ١٨٩٢

طبع
فى مدرسة المهندسخانه الخديوية بسراى درب الجماميز سنة ١٨٩٦ افرنكيه



بسم الله الرحمن الرحيم

فى السينماتيك

الحركات المختلفة

تعاريف

والسينماتيك هو دراسة الحركات بقطع النظر عن القوى التى تحدثها
ويعتبر فيه الطريق الذى يتبعه المتحرك والمسافة التى يقطعها والزمن المستعمل لقطعها
ويعتبر فى هذا العلم الثانية وحدة للزمن

خط السير – يسمى خط السير الخط المرسوم بنقطة مادية متحركة
والحركة تكون مستقيمة اذا كان خط السير مستقيما ومنحنية اذا كان خط السير منحنيا ودائرية اذا كان خط السير محيط دائرة

ولأجل ان تكون حركة متحرك معينة يقتضى أولا معرفة خط السير وثانيا معرفة وضع المتحرك فى كل لحظة على خط سيره

قانون الحركة – قانون الحركة هو الارتباط الواقع بين المسافة والزمن
وايضاح هذا القانون بالطريقة الجبرية عبارة عن معادلة الحركة وايضاحه بخط عبارة عن بيانه بالطريقة الرسمية

نقطة الأصل – تسمى نقطة أصل المسافات النقطة من خط السير التى يبتدأ منها بحساب المسافات الناتجة من قانون الحركة

ومبدأ الازمان هو اللحظة التى تبتدئ منها الازمان المعتبرة

مثال معادلة الحركة – لنفرض ان قانون حركة متحرك معين بالمعادلة

$$\text{هـ} = ٥\,\text{ن} - ٢\,\text{ن}^{٢}$$

وان خط السير هو ا ب (ش ١) ونقطة و منه هى نقطة أصل المسافات فحينئذ للحصول على وضع المتحرك فى نهاية

فى نهاية ثانية مثلا يجعل فى المعادلة السابقة ن = ١ فيحدث

هـ = ٣

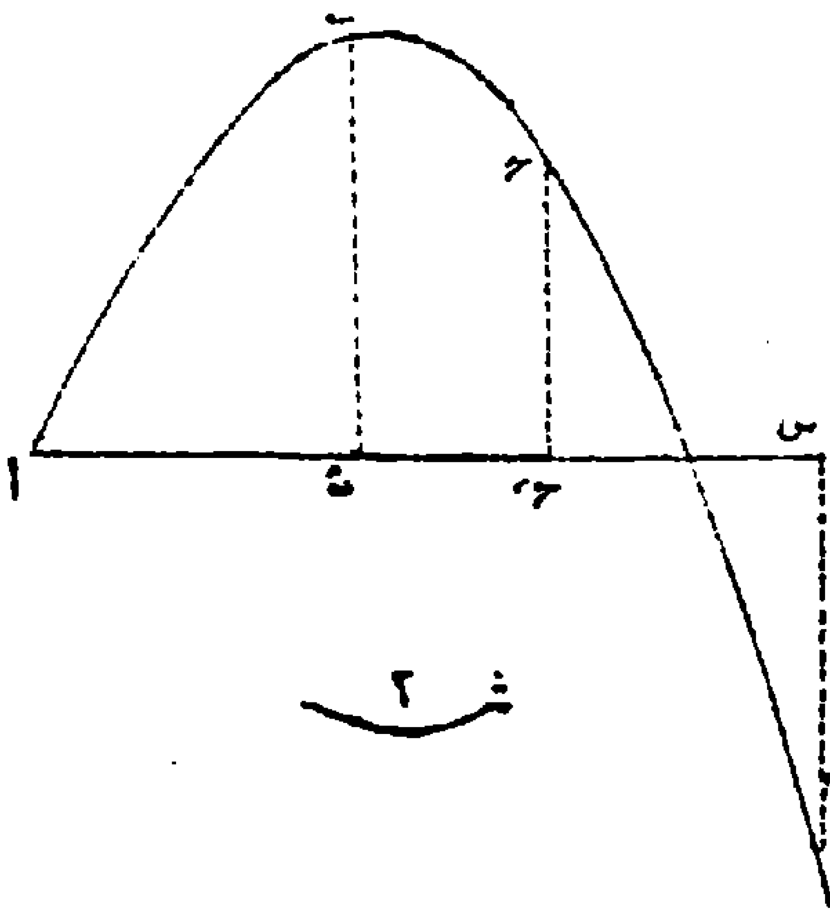


وحينئذ يؤخذ على ا ب بالابتدا من نقطة و طول مساوٍ الى ثلاث وحدات فنجد نقطة م التى هى عبارة عن الوضع المطلوب ايجاده

وفى نهاية ٣ً يكون هـ = -٣

فحينئذ يؤخذ بالابتدا من نقطة و فى الجهة المضادة للأولى ثلاث وحدات ونكون مَ هى وضع المتحرك وبمثل ذلك يمكن الحصول على وضع المتحرك فى لحظة ما حيثما اتفق

بيان الحركة بالطريقة الرسمية — للحصول على المنحنى البيانى للحركة يؤخذ على محور السينات المسمى أيضا بمحور الازمان أطوال مناسبة للازمان المعتبرة ثم يؤخذ على الاحداثيات الرأسية المقابلة لتلك الازمان أطوال مناسبة للمسافات التى قطعها المتحرك بالابتدا من نقطة الأصل فى اللحظات المختلفة ثم تجمع النقط المتحصلة بخط متصل فهذا الخط يكون هو الخط البيانى للحركة الذى يسمى أيضا بمنحنى المسافات



فالمنحنى المرسوم فى (شـ ٢) المتحصل بناء على ماذكر يدل على الحركة التى معادلتها هى المعادلة المذكورة فى المثال السابق وهى هـ = ٥ن - ٢ن٢ فيشاهد أنه فى مبدأ الزمن كان المتحرك فى نقطة اصل المسافات وأنه متباعد عنها فى نهاية ثانية وربع ويكون فى هذه الحالة على بعد د ك وهو بعده الاعظم ما يمكن وبعد ذلك فالمتحرك يقترب من نقطة الأصل التى يأتى فيها فى نهاية ثانيتين ونصف ثم يبعد عنها الى ما لانهاية فى الجهة العكسية وللحصول بواسطة المنحنى البيانى للحركة على وضع المتحرك فى لحظة معينة ولكن فى نهاية ٢ً مثلا يؤخذ على محور الازمان ا حَ = ٢ فمقدار الاحداثى الرأسى حـ حَ يكون هو بعد المتحرك عن نقطة الأصل ثم يؤخذ هذا البعد على خط السير بالابتداء من نقطة و فى الجهة الموجبة أو السالبة على حسب اشارة الاحداثى الرأسى فالنقطة المتحصلة حينئذ تكون هى وضع المتحرك فى اللحظة المعتبرة

تنبيهات

الأول — يجب الاحتراس من الالتباس بين خط السير وبين الخط البيانى للحركة اذ أن الخط البيانى للحركة يبقى بعينه سواء كانت مستقيمة أو منحنية

الثانى — يمكن الحصول على الخط البيانى لقانون الحركة بدون معلومية معادلتها بواسطة عمل عدة تجارب بها يتعين وضع المتحرك فى ازمان محدودة وحينئذ يتحصل على عدة نقط تكفى لرسم المنحنى بضبط كافٍ كلما كانت الأوضاع المرصودة كثيرة ومختبة جيدا

الثالث أن مقياسى الازمان والمسافات اختياريان فحينئذ اذا اتفق على بيان وحدة الزمن ووحدة المسافات

بطول واحد فأن المقياسين يتحدان وتقاس اذن الاحداثيات الافقية والرأسية بواسطة مقياس مشترك ولكن اذا كان المتر والثانية مبينين بطولين مختلفين فالمقياسان يختلفان عن بعضهما

وحينئذ يلزم الأعتناء بتقدير الاحداثيات الافقية بمقياس الازمان والاحداثيات الرأسية بمقياس المسافات على التناظر

انواع الحركات

قد شاهدنا فيما تقدم أنه بناء على جنس خط السير قد تكون الحركات مستقيمة أو منحنية لكن هذه الحركات تكون منتظمة أو متغيرة بحسب الارتباط الواقع بين المسافة المقطوعة والزمن المستعمل لقطعها أعنى بحسب قانون الحركة

فى التحرك المنتظم

تعريف ـ التحرك المنتظم ـ التحرك المنتظم هو الذى فيه يقطع المتحرك مسافات متساويه فى ازمان متساوية مهما كان صغر تلك الازمان أعنى أنه فى التحرك المنتظم تكون المسافات المقطوعة مناسبة للازمان المستعملة لقطعها

السرعة ـ السرعة فى التحرك المنتظم هى المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن

معادلة التحرك المنتظم

يوجد فى هذا التحرك حالتان ـ الأولى ـ أن يكون الوضع الابتدائى للمتحرك منطبقا على نقطة اصل المسافات وحينئذ اذا كان مبدأ الأزمان مطابقا لمبدأ المسافات ورمز بحرف ﻫ للمسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز وبحرف ع للسرعة فأنه بناء على تعريف التحرك المنتظم يكون

ﻫ = ع ز . . . . (١)

الثانية ـ ان يكون الوضع الابتدائى مغايرا لنقطة اصل المسافات وفى هذه الحالة اذا كان المتحرك فى مبدأ الزمن على بعد ا من نقطة الأصل و ورمز بحرف ﻫ لبعده عن نقطة الاصل المذكوره فى نهاية الزمن ز يكون ﻫ ـ ا هى المسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز وحينئذ اذا كانت السرعة هى ع فبناء على تعريف التحرك المنتظم يكون

ﻫ ـ ا = ع ز . . . . (٢) ومنه يحدث

ﻫ = ا + ع ز . . . . . (٣)

(تنبيهان) الأول ـ من القانون (٢) يحدث

ع = (ﻫ ـ ا) / ز

أعنى انه يمكن تعريف السرعة بتعريف آخر وهو أنه فى التحرك المنتظم تكون السرعة عبارة عن النسبة الكائنة بين المسافة المقطوعة والزمن المستعمل لقطعها

الثانى ـ انه فى التحرك المنتظم تكون السرعة ثابتة وأن المسافة هى الدالة بدرجة أولى بالنسبة للزمن

بيان التحرك المنتظم بالطريقة الرسمية

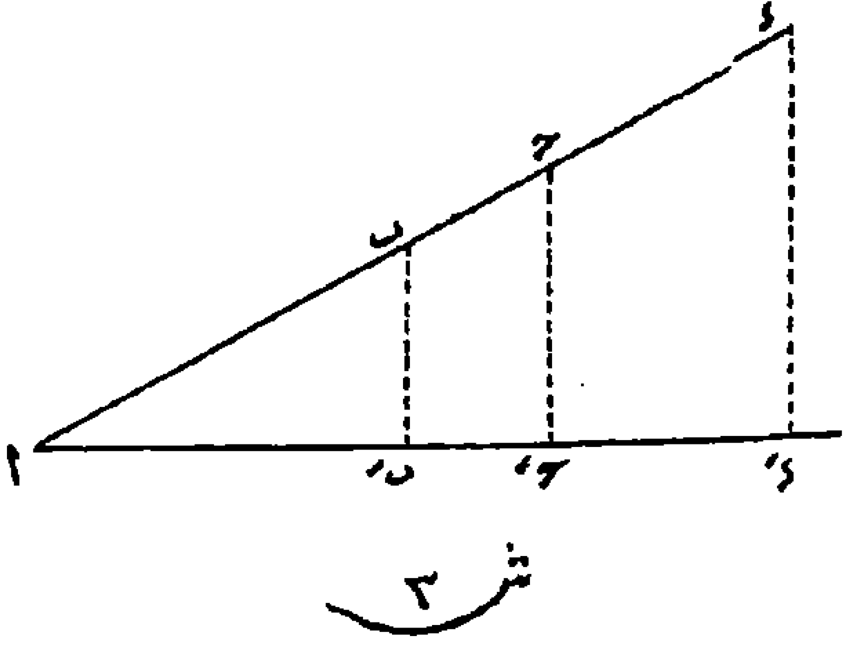
قانون التحرك المنتظم يمكن بيانه بخط مستقيم وفى ذلك حالتان

الأولى ـ ان يكون المتحرك فى نقطة أصل المسافات فى مبدأ الزمن وفى هذه الحالة يكون الخط المستوى الدال على قانون التحرك

المتحرك المنتظم هو خط مستقيم

لأنه بناء على التعريف الثاني للسرعة يكون (ش ٣)

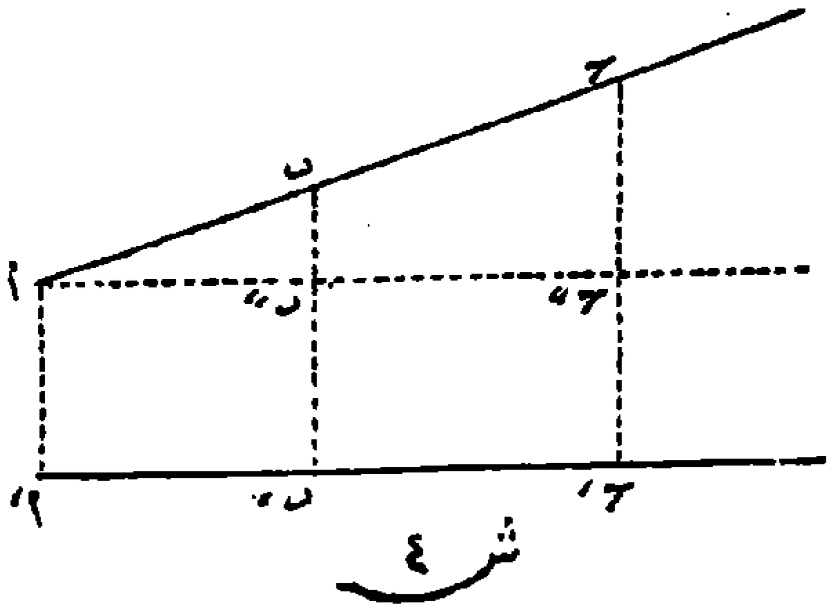
$$\frac{ب ت}{ا ت} = \frac{حـ حـَ}{ا حـَ} = \frac{ء ءَ}{ا ءَ}$$


ش ٣

وحينئذ تكون المثلثات القائمة الزوايا ا ب ت ، ا حـ حـَ ، ا ء ءَ متشابهة وتكون الزوايا ب ا ت ، حـ ا حـَ ، ء ا ءَ متساوية وعليه فتكون النقط ب ، حـ ، ء .... الخ موجودة على مستقيم واحد يدل على قانون التحرك المنتظم

الثانية — ان لا يكون المتحرك في نقطة أصل المسافات في مبدأ الزمن وفي هذه الحالة نفرض أنه في مبدأ الزمن يكون المتحرك على بعد اا َ (ش ٤) من نقطة أصل المسافات وحينئذ اذا مددنا من نقطة ا مستقيما موازيا لمحور الازمان نجده على الأحداثيات الرأسية اجزاء ت ب ، حـَ حـ ، .... الخ دالة على المسافات المقطوعة في الازمنة اتَ ، احـَ ، .... الخ

ويؤل الأمر حينئذ الى الحالة السابقة


ش ٤

وعلى ذلك فيكون الخط المستقيم اء دالا على تحرك منتظم فيه اا َ هي المسافة الابتدائية

فاذا كانت الازمان والمسافات منسوبة الى مقياس واحد فسرعة التحرك المنتظم تتعين بظل الزاوية الواقعة بين المستقيم البياني للحركة ومحور الازمان فاذا كان المطلوب تعيين سرعة التحرك المنتظم المبين بالمستقيم ا حـ (ش ٥)

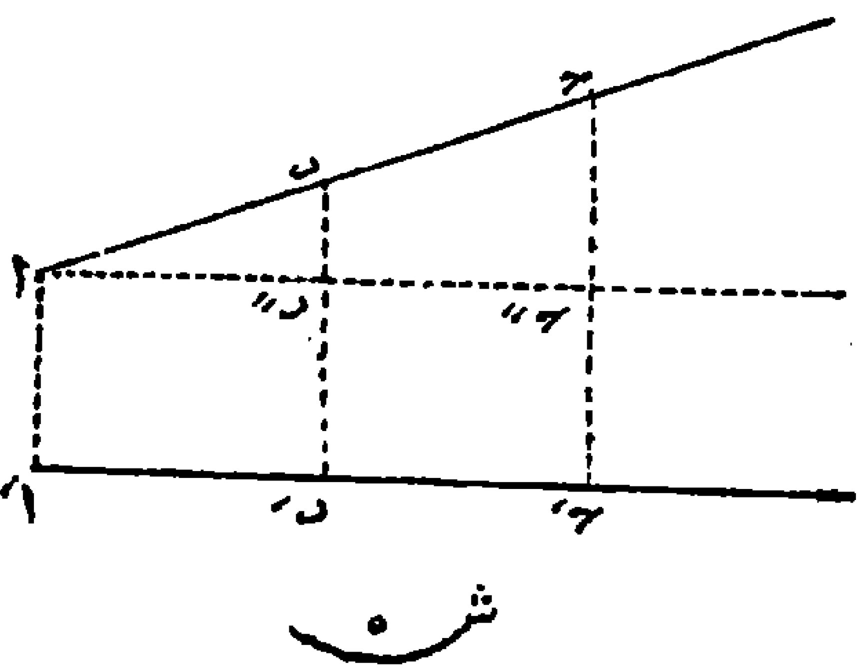
فأنه بناء على تشابه المثلثات يكون

$$\frac{ب تَ}{ا تَ} = \frac{حـ حـَ}{ا حـَ} = ع$$

واذا رمزنا بحرف ا للزاوية الواقعة بين المستقيمين ا حـ ، ا حـَ

يحدث $\frac{ب تَ}{ا تَ}$ = طا ا ومنها

ع = طا ا

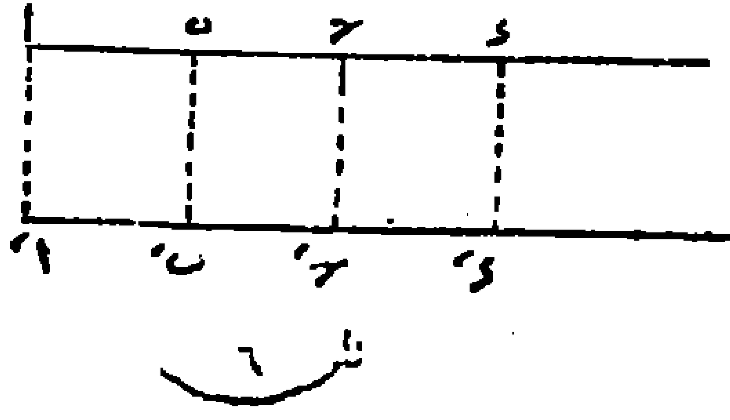

ش ٥

تنبيهات — الأول — لأجل الحصول على مقدار هذا الظل يؤخذ اتَ مساويا للوحدة ثم يقاس ب تَ فالعدد المتحصل يكون مساويا الى طا ا

الثاني — مهما كانت المقاييس المتخذة للازمان و للمسافات فان سرعة التحرك المنتظم تكون مساوية للعامل الزاوي لمستقيمها البياني والعامل الزاوي لمستقيم منسوب لمحوري احداث هو خارج قسمة فرق احداثيين موازيين لمحور الصادات مقدرا بمقياس المسافات على فرق الاحداثيين الموجودين على محور السينات المقابلين لهما مقدرا بمقياس الازمان والعامل الزاوي لا يصير مساويا لظل الميل الا اذا كان المحوران متعامدين

وكان المقياسان متحدين

وقد يرسم أحيانا الخط البيانى للسرعة بأن يؤخذ على محور الأحداثيات الافقية أبعاد مناسبة للأزمان وعلى الاحداثيات الرأسية أطوال مناسبة للسرع المقابلة لها

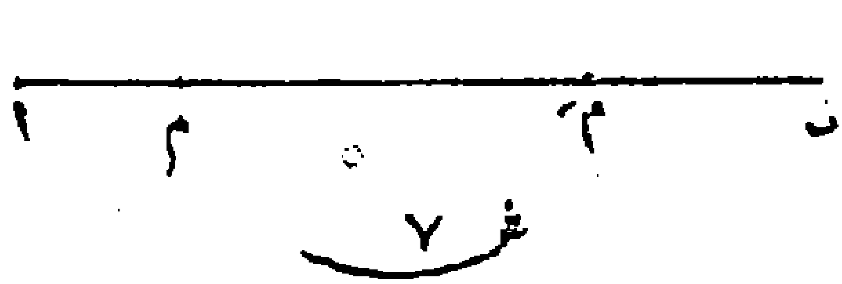


وحيث ان السرعة فى التحرك المنتظم ثابتة فخطها البيانى يكون موازيا الى محور الاحداثيات الافقية والطول ا ا' يكون دالا على مقدار السرعة (ش ٦)

الحركة المستقيمة المتغيرة

تعريف ـ التحرك المتغير هو الذى لا تكون فيه المسافات المقطوعة مناسبة للازمان المستعملة لقطعها

السرعة المتوسطة ـ السرعة المتوسطة هى سرعة الحركة المنتظمة التى يستعملها المتحرك فى المدة المفروضة لقطع نفس المسافة التى قطعها بحركة متغيرة



فاذا فرض متحرك م (ش ٧) يتحرك على مستقيم اب بحركة متغيرة وفرض انه فى أثناء الزمن ى قطع المسافة م مَ فسرعته المتوسطة تكون $\frac{م مَ}{ى}$

السرعة فى لحظة معينة ـ السرعة فى لحظة معينة هى النهاية التى تميل اليها نسبة ازدياد المسافة الى ازدياد الزمن متى صغر ازدياد الزمن بلا نهاية

فاذا رمز بحرف هـ للمسافة المقطوعة فى نهاية الزمن ز وبالحرف هَ للمسافة المقطوعة فى نهاية الزمن ز + ى فالفرق هَ ـ هـ يكون هو ازدياد المسافة فى مدة المسافة الزمنية ى وتكون النسبة $\frac{هَ - هـ}{ى}$ هى السرعة المتوسطة فى هذه المسافة الزمنية ومتى نقص ازدياد الزمن ى ومال نحو الصفر فأن ازدياد المسافة هَ ـ هـ ينقص ويميل ايضا نحو الصفر لكن النسبة $\frac{هَ - هـ}{ى}$ تميل نحو نهاية معينة وتسمى بالسرعة فى نهاية الزمن ى بالضبط

وقد يمكن ان يقال أيضا ان السرعة فى نهاية الزمن ز هى النهاية التى تميل اليها السرعة المتوسطة بالابتدا من الزمن ز حينما تنقص المدة الزمانية المفروضة بلا نهاية

تنبيه ـ واذا قسم الزمن الذى فيه حصلت الحركة المتغيرة الى عدد كبير من الاقسام المتساوية التى يقطع المتحرك فى كل منها بانتظام نفس المسافة التى قطعها بحركة متغيرة فأن الحركة الجديدة تختلف قليلا عن الحركة المتغيرة كلما كانت اللحظات المذكورة كثيرة جدا واذا كانت تلك اللحظات صغيرة بقدر ما يراد فأن الحركتين يكونان متساويتين وبناء على ذلك يشاهد ان سرعة الحركة المتغيرة فى لحظة معينة عبارة عن سرعة الحركة المنتظمة الجزئية المقابلة للحظة المذكورة

تعيين السرعة

سنشاهد كيفية الحصول على مقدار السرعة فى لحظة ما بعد معرفة قانون الحركة اما بمعادلة أو بمنحنى

الأول

الأول - اذا كان قانون الحركة معلوما بمعادلة وكان المطلوب تعيين السرعة فى نهاية الزمن ز لحركة معلومة بمعادلة $هـ = ك ز^٢$ الذى فيها هـ رمز للمسافة المقطوعة ، ك مقدار ثابت حيثما اتفق ، ز الزمن المفروض فأنه فى نهاية الزمن ز + ى تكون المسافة المقطوعة هى

$$هـَ = ك\ (ز + ى)^٢ = ك ز^٢ + ٢ ك ز ى + ك ى^٢$$

وحينئذ تكون المسافة المقطوعة فى مدة الزمن ى هى

$$هـَ - هـ = ٢ ك ز ى + ك ى^٢$$

واذا قسم طرفا المعادلة على ى يحصل على السرعة المتوسطة فى مدة الزمن ى هكذا

$$\frac{هـَ - هـ}{ى} = ٢ ك ز + ك ى$$

واذا فرض أن ى تنقص شيئا فشيئا وتميل نحو الصفر فالحد ك ى يميل نحو الصفر أيضا وعند النهاية يكون

$$نها\ \frac{هـَ - هـ}{ى} = ٢ ك ز$$

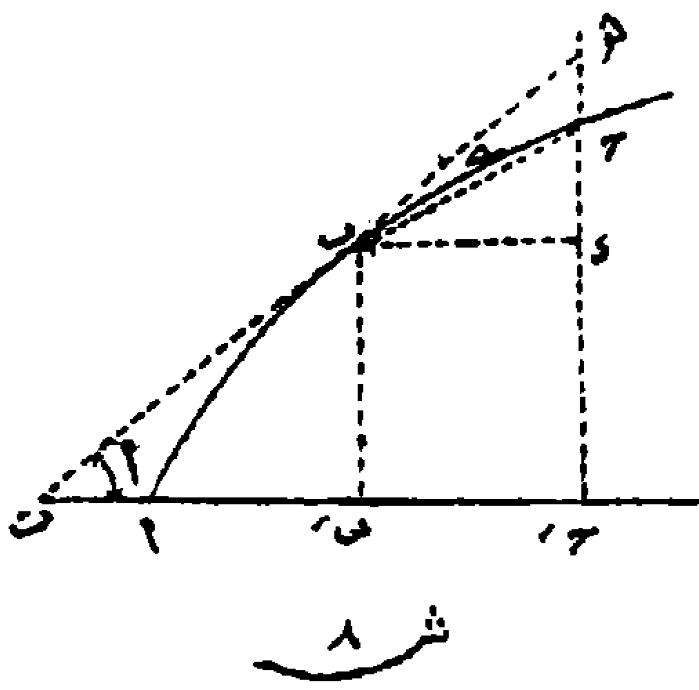
وهى السرعة فى نهاية الزمن ز وحينئذ اذا رمز لها بالحرف ع يكون

$$ع = ٢ ك ز$$

وثانيا اذا كان قانون الحركة معلوما بمحنى وكان المطلوب تعيين السرعة فى نهاية الزمن ز لحركة معلومة بمحنى احداثياته الرأسية والافقية منسوبة لمقياس واحد

يؤخذ على محور الافقيات البعد اب مساويا للزمن ز والبعد اجَ مساويا لزمن أكبر من ز وحينئذ فالمتحرك يقطع المسافة حـ ء اثناء زيادة الزمن بَ حَ وسرعته المتوسطة فى هذه المدة تكون (شـ ٨)

$$\frac{حـ ء}{بَ حَ} = \frac{حـ ء}{ب ء} = ظا حـ ب ء$$



شـ ٨

لكن اذا نقص الزمن بَ حَ فان النقطة حـ تقرب شيئا فشيئا من النقطة ب والسرعة المتوسطة لاتزال مبينة بظل الزاوية المتكونة بين الوتر ب حـ والمستقيم ب ء وفى النهاية عند انطباق النقطة حـ على ب فالقاطع ب حـ يصير مماسا فى نقطة ب وتكون السرعة فى اللحظة المفروضة مبينة بظل زاوية هـ ب ء أو ظا ؟*

(*) ملحوظة - ولأجل الحصول على مقدار هذا الظل يؤخذ بَ حَ = الوحدة ويمد الاحداثى الرأسى حَ ء حـ الى نقطة هـ التى هى نقطة تقابله مع ت ب هـ فطول ء هـ يكون مساويا الى ظا ؟

وحينئذ اذا كانت الازمان والمسافات مبينة بمقياس واحد فالسرعة فى لحظة معينة تكون مبينة بظل الزاوية الواقعة بين محور الازمان وبين المماس للمنحنى فى النقطة المقابلة للحظة المذكورة

تنبيه – واذا لم تكن المسافات والازمان منسوبة لمقياس واحد فأن السرعة فى اللحظة ز تكون متناسبة الى طا ا فقط لأنه اذا كان $\frac{١}{ك}$ هو العدد الذى يلزم ان تضرب فيه الاحداثيات الافقية كى تكون وحدة الازمان مبينة بمقياس كوحدة المسافات فأن السرعة المتوسطة اثناء ازدياد الزمن المبين بالمستقيم تَ حَ تكون هى

$$\text{ع}_{\text{ء}} : \frac{\text{تَ حَ}}{\text{ك}} = \text{ك} \frac{\text{حـ ء}}{\text{تَ حَ}} = \text{ك طا حـ ب ء}$$

وحيث ان ك عدد ثابت فتكون السرعة فى اللحظة ز هى

$$\text{ع} = \text{ك طا ا}$$

وبالمثل فى الازمان ز١ ، ز٢ ..... الخ تكون السرع هى ع١ = ك طا ا١ ، ع٢ = ك طا ا٢ ..... الخ
واذن يكون

$$\text{ك} = \frac{\text{ع}}{\text{طا ا}} = \frac{\text{ع}_١}{\text{طا ا}_١} = \frac{\text{ع}_٢}{\text{طا ا}_٢}$$

وعليه فالسرع تكون متناسبة للظلال المطابقة لها

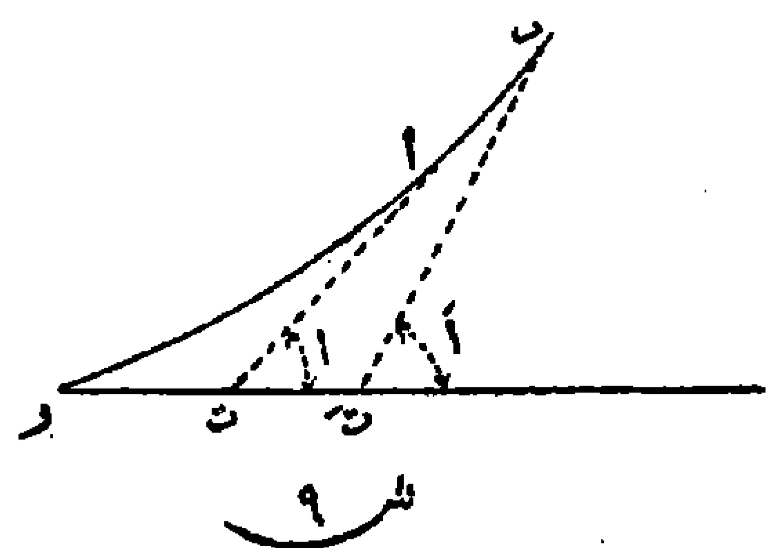
ويمكن ان يقال أيضا انه فى جميع الأحوال تكون السرعة مساوية الى المعامل الزاوى لمماس الخط البيانى لقانون الحركة

تنبيه – قد شاهدنا فيما تقدم أن الحركة المتغيرة يمكن اعتبارها مركبة من حركات منتظمة ازمانها صغيرة بقدر ما يراد وسرعها مختلفة وحينئذ فكل جزء من الاجزاء المستقيمة المكونة للمنحنى اح يكون هو المستقيم البيانى لاحد هذه الحركات الجزئية

والمماس ب ت يكون هو الخط البيانى للحركة الجزئية المقابلة للنقطة ب وعليه يكون طا ا يدل على سرعة الحركة الجزئية المذكورة

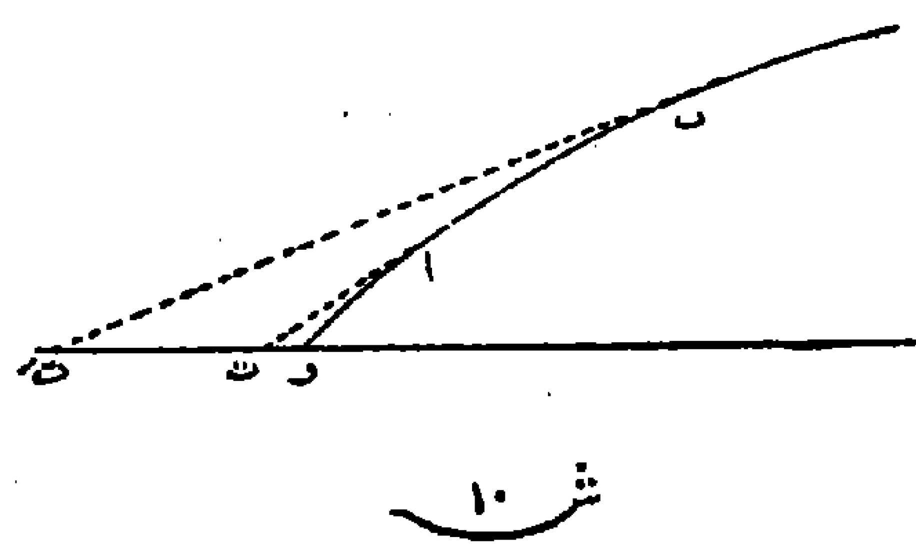
الحركة العجلية

الحركة تكون عجلية متى اخذت السرعة فى الازدياد والمنحنى البيانى لهذه الحركة يكون تحديبه متجها نحو الجهة الموجبة لمحور الازمان حيث أنه فى هذه الحالة تكون الزاوية ا آخذة فى الكبر بالاستمرار كما يشاهد من (شكل ٩)



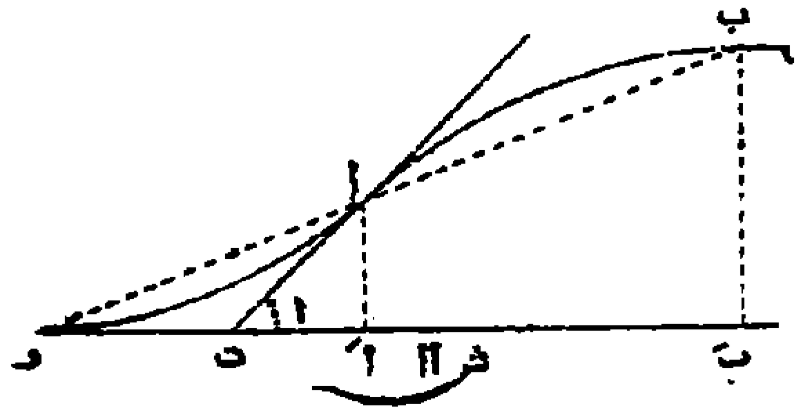
شكل ٩

الحركة التقصيرية – الحركة تكون تقصيرية متى أخذت فى النقص وفى هذه الحالة يكون تقعير المنحنى البيانى للمسافات متجها نحو الجهة الموجبة لمحور الازمان وأن الزاوية ا تأخذ فى النقص بالاستمرار كما يشاهد من (شكل ١٠)



شكل ١٠

الحركة الدورية ـ الحركة تكون دورية اذا اخذت السرعة بعد مسافات زمنية متساوية نفس المقادير التى كانت اخذتها من قبل والدور هو الزمن الذى يفصل اللحظات المتتالية التى فيها تأخذ السرعة نفس سلسلة المقادير والخط البيانى لقانون الحركة الدورية هو منحنٍ متموج ففى الحركة المبينة بالمنحنى و ا ب تكون السرعة ابتداء معدومة ثم تتزايد فى اثناء الزمن و أ شر ا ا الذى فى نهايته تصل الى النهاية الكبرى ثم تتناقص فى مدة الزمن أ ت الذى فى نهايته تصير معدومة ثم تأخذ بعد ذلك نفس المقادير التى كانت اخذتها من قبل



وحينئذ يكون الزمن و ت هو دور والمستقيم و ب يدل على الحركة المنتظمة التى سرعتها هى السرعة المتوسطة فى مدة الدور وامثلة الحركات الدورية كثيرة منها حركة البندول وحركة مكبس آلة بخارية وحركة الارض حول الشمس و ..... الخ ففى الحالتين الأوليين السرعة تنعدم مرتين فى الدور الواحد لتغير اشارتها وفى الحالة الثالثة السرعة تتغير بين نهايات متقاربة جدا وهذا هو السبب فى عدم تساوى الأيام الشمسية ويستعاض عادة الزمن الحقيقى بزمن متوسط فيه تكون الازمان متساوية (راجع علم القسموغرافيا)

فى الحركة المنتظمة التغير وسقوط الأجسام

تعريف ـ الحركة المنتظمة التغير هى التى تتغير فيها السرعة بكميات متساوية فى أزمنة متساوية فاذا تزايدت السرعة فالحركة تكون منتظمة العجلة واذا تناقصت السرعة فالحركة تكون منتظمة التقصير

العجلة ـ الكمية الثابتة التى تتغير فيها السرعة فى كل وحدة زمانية فى الحركة المنتظمة التغير تسمى بالعجلة والعجلة تكون موجبة فى الحركة العجلية وسالبة فى العجلة التقصيرية

قانون السرع

اذا رمز بالرمز ع للسرعة الابتدائية أعنى لسرعة فى مبدأ الزمن ز وبالرمز و للعجلة بحيث أن السرعة تزداد فى كل وحدة زمنية بالكمية و فأنها تزداد بالمقدار و ز فى مدة الزمن ز وحينئذ اذا رمزنا بحرف ع للسرعة فى نهاية الزمن ز يكون قانون السرع هو

$$ع = ع + و ز$$

واذا كان الجسم خارجا من السكون فأن السرعة الأصلية تكون معدومة ويؤول قانون السرعة الى

$$ع = و ز$$

واذا كانت الحركة منتظمة التقصير فالعجلة تكون سالبة ويكون

$$ع = ع - و ز$$

قانون المسافات

اذا كان المطلوب ايجاد المسافة المقطوعة بحركة منتظمة العجلة فى مدة الزمن ز بمتحرك سرعته الابتدائية ع وعجلته و نقسم الزمن ز الى مسافات زمنية متساوية عددها ح وللاختصار نجعل $\frac{ز}{ح}$ = ى فيرى أن السرع

في مبدأ كل من المسافات الزمانية المذكورة هي

$$\text{ع}_{1} = \text{ع}$$
$$\text{ع}_{2} = \text{ع} + \text{و ى}$$
$$\text{ع}_{3} = \text{ع} + 2\,\text{و ى}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ع} + (\text{ن}-1)\,\text{و ى}$$

واذا اعتبرنا ان السرعة في كل من هذه المسافات الزمنية ثابتة فالمسافات المقطوعة تكون

$$\text{ﻫ}_{1} = \text{ع}_{1}\,\text{ى} = \text{ع ى}$$
$$\text{ﻫ}_{2} = \text{ع}_{2}\,\text{ى} = \text{ع ى} + \text{و ى}^{2}$$
$$\text{ﻫ}_{3} = \text{ع}_{3}\,\text{ى} = \text{ع ى} + 2\,\text{و ى}^{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{ﻫ}_{\text{ن}} = \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{ى} = \text{ع ى} + (\text{ن}-1)\,\text{و ى}^{2}$$

وحاصل جمع هذه المسافات وهو مج ﻫ يكون مساويا الى

$$\text{مج ﻫ} = \text{ن ع ى} + \left\{1+2+3+\cdots+(\text{ن}-1)\right\}\text{و ى}^{2}$$

وبتعويض ى بمقدارها وهو $\frac{\text{ز}}{\text{ن}}$ يحدث

$$\text{مج ﻫ} = \text{ع ز} + \frac{1+2+3+\cdots+(\text{ن}-1)}{\text{ن}^{2}}\,\text{و ز}^{2}$$

وحينئذ كلما تزايد ن فالمسافة الزمانية ى تنقص ومجموع الحركات الجزئية المفروضة يقرب دائما من الحركة المنتظمة العجلة المذكورة وعند النهاية تتحد معها

وحينئذ للحصول على المسافة ﻫ المقطوعة بحركة منتظمة العجلة في مدة الزمن ز يلزم أخذ نهاية المقدار السابق عند ازدياد ن الى ما لا نهاية فيكون

$$\text{ﻫ} = \text{نها}\left\{\text{ع ز} + \frac{1+2+3+\cdots+(\text{ن}-1)}{\text{ن}^{2}}\,\text{و ز}^{2}\right\}$$

ومنه يحدث

$$\text{ﻫ} = \text{ع ز} + \tfrac{1}{2}\,\text{و ز}^{2}$$

تنبيهات

الأول ـ في حالة ما تكون الحركة منتظمة التقصير يكون

$$\text{ﻫ} = \text{ع ز} - \frac{\text{و ز}^{2}}{2}$$

الثاني ـ اذا كانت السرعة الابتدائية معدومة يكون $\text{ع} = 0$ وحينئذ يكون

$$\text{ﻫ} = \frac{\text{و ز}^{2}}{2}$$

واذا رمزنا بحرفي ﻫ و ﻫَ للمسافتين المقطوعتين في مدة الزمنين ز و زَ يكون

$$\text{ﻫ} = \frac{\text{و ز}^{2}}{2} \quad،\quad \text{ﻫَ} = \frac{\text{و زَ}^{2}}{2}$$

ومنهما

ومنها يحدث $\frac{ه}{ه'} = \frac{ز^2}{ز'^2}$

وحينئذ حينما يخرج المتحرك من السكون فالمسافات المقطوعة تكون مناسبة لمربعات الازمان المستعملة لقطعها

الثالث ـ اذا كان فى القانون ($ه = \frac{و ز^2}{2}$) $ز = ١$ يكون

$ه = \frac{و}{2}$ ومنه يحدث $و = 2 ه$

أعنى أنه فى الحركة المنتظمة العجلة اذا خرج المتحرك من السكون فالعجلة تكون ضعف المسافة المقطوعة فى مدة الثانية الاولى

الرابع ـ يمكن وضع القانون

$ه = ع ز + \frac{و ز^2}{2}$ بالصورة الآتية

$$ه = (ع + \frac{و ز}{2}) ز$$

ولكن $ع + \frac{و ز}{2}$ أو $ع + و \frac{ز}{2}$ عبارة عن السرعة فى منتصف الزمن $ز$ وحينئذ تكون المسافة المقطوعة بحركة منتظمة العجلة هى فى زمن معين عين المسافة التى يقطعها المتحرك بانتظام فى المدة المذكورة بسرعة مساوية للسرعة المقابلة لمنتصف الزمن $ز$

مسئلة

مامقدار السرعة التى اكتسبها متحرك قطع المسافة $ه$ بحركة منتظمة العجلة

لذلك يقال اذا عوض فى القانون

$$ه = ع_{.} ز + \frac{و ز^2}{2}$$

الزمن $ز$ بمقداره المستخرج من القانون

$ع = ع_{.} + و ز$ أعنى بالمقدار

$ه = ز = \frac{ع - ع_{.}}{و}$ يحصل

$$ه = \frac{ع_{.}(ع - ع_{.})}{و} + \frac{(ع - ع_{.})^2}{2 و}$$

ومنه يحدث $ه = \frac{ع - ع_{.}}{و} (ع_{.} + \frac{ع - ع_{.}}{2}) = \frac{ع - ع_{.}}{و} \times \frac{ع + ع_{.}}{2} = \frac{ع^2 - ع_{.}^2}{2 و}$

ومنه يحدث $ع = \sqrt{ع_{.}^2 + 2 و ه}$

فاذا كانت السرعة الابتدائية معدومة فالقانون يؤول الى

$$ع = \sqrt{2 و ه}$$

واذا كانت الحركة منتظمة التقصير يكون

$$ع = \sqrt{ع_{.}^2 - 2 و ه}$$

العجلة فى التحرك المستقيم الحيثما اتفق ـ العجلة المتوسطة ـ العجلة المتوسطة لحركة متغيرة حيثما اتفق فى زمن معين هى عجلة التحرك المنتظم التغير الذى يستعمله المتحرك فى المدة المفروضة لقطع نفس المسافة التى قطعها بحركة متغيرة

فقياسا على كون مقدار العجلة $و = \frac{عَ - ع}{ن}$ المستخرج ذلك من قانون

$ع = عَ + و ن$

تكون العجلة المتوسطة هي النسبة الكائنة بين ازدياد السرعة وبين ازدياد الزمن

اعنى اذا فرض أن متحركا يتحرك بحركة مستقيمة متغيرة حيثما اتفقت ورمز برمزى ع ، عَ لسرعتيه فى الزمنين ن ، (ن + ى) تكون العجلة المتوسطة فى مدة الزمن ى هى $\frac{عَ - ع}{ى}$

العجلة فى لحظة معينة ـ العجلة فى لحظة معينة هى النهاية التى تميل اليها نسبة ازدياد السرعة الى ازدياد الزمن حينما يميل ازدياد الزمن نحو الصفر

فحينئذ اذا مال ى نحو الصفر فالكمية عَ - ع تميل نحو الصفر أيضا انما العجلة المتوسطة $\frac{عَ - ع}{ى}$ تميل نحو نهاية معينة و وتكون هى بحسب التعريف عبارة عن العجلة فى اللحظة ن أعنى أن

$و = نها \frac{عَ - ع}{ى}$ عندما تميل ى نحو الصفر

(الارتباطات الجبرية الواقعة بين المسافة والسرعة والعجلة فى الحركة المستقيمة المتغيرة)

النهاية التى تميل اليها النسبة الكائنة بين ازدياد دالة ما ص وازدياد متغيرها س حينما يميل هذا المتغير نحو الصفر تسمى مشتقة ص بالنسبة للكمية س

اعنى اذا كان $ص = د (س)$

لمشتقة الدالة تبين هكذا

$صَ = دَ (س)$

ففى حركة مستقيمة حيثما اتفقت المسافة هـ والسرعة ع والعجلة ح هى دوال للمتغير ن

وبناء على التعاريف السابقة تكون السرعة مشتقة المسافة والعجلة مشتقة السرعة

فاذا وضعنا $هـ = د (ن)$ يكون

$ع = هَـ = دَ (ن)$ ويكون

$و = عَ = هـً = دً (ن)$

ومعلوم فى علم الجبر أولا ان مشتقة حاصل الجمع تساوى مجموع مشتقات اجزائه

ثانيا ان مشتقة دالة صحيحة مثل $عَ نَ^م$ يتحصل عليها بالقانون

$م عَ نَ^{م-١}$

مثال ذلك اذا كان $هـ = عَ + تَ ن + حَ ن^٢ + لَ ن^٣$

فيكون $ع = تَ + ٢ حَ ن + ٣ لَ ن^٢$)

$و = ٢ حَ + ٦ لَ ن$

سقوط الأجسام

من الامثلة المهمة للحركة المنتظمة العجلة سقوط الاجسام فى الفراغ وسقوط الاجسام يتبع هذه القوانين الثلاثة :

الثلاثة الآتيه

الاول ـ جميع الأجسام تسقط بسرعة واحدة فى الفراغ

الثانى ـ المسافات المقطوعة تكون مناسبة لمربعات الازمان المستعملة لقطعها

الثالث ـ السرعة تكون مناسبة لزمن السقوط

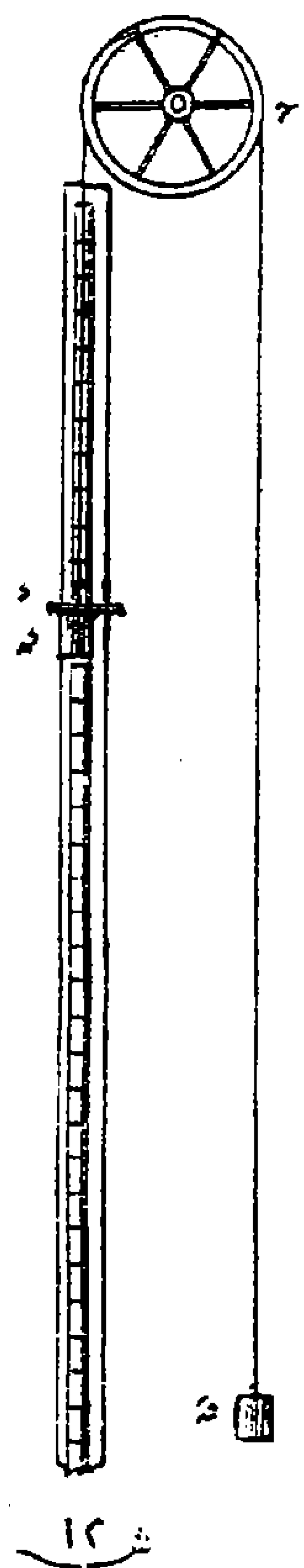
ويمكن تحقيق القانون الاول بواسطة انبوبة نيوتون والاثنان الآخران بالمستوى المائل لغليلى وبآلة آتود وجهاز مورات وغير ذلك

تجارب غليلى

قد استعمل غليلى المستوى المائل لأجل ايجاد قوانين سقوط الاجسام وهذا المستوى عبارة عن خيط مشدود تتدحرج عليه بكرة معلق فى حاملها ثقل ويمكن ابطاء السرعة على حسب الاراده بتقليل زاوية المستوى المائل ثم تقاس المسافات المقطوعة بضبط تام تستنتج منها القوانين المطلوبة وقد شاهد غليلى ان المسافات المقطوعة فى المسافات الزمنية المتتالية المتساوية تكون مناسبة للأعداد الفردية

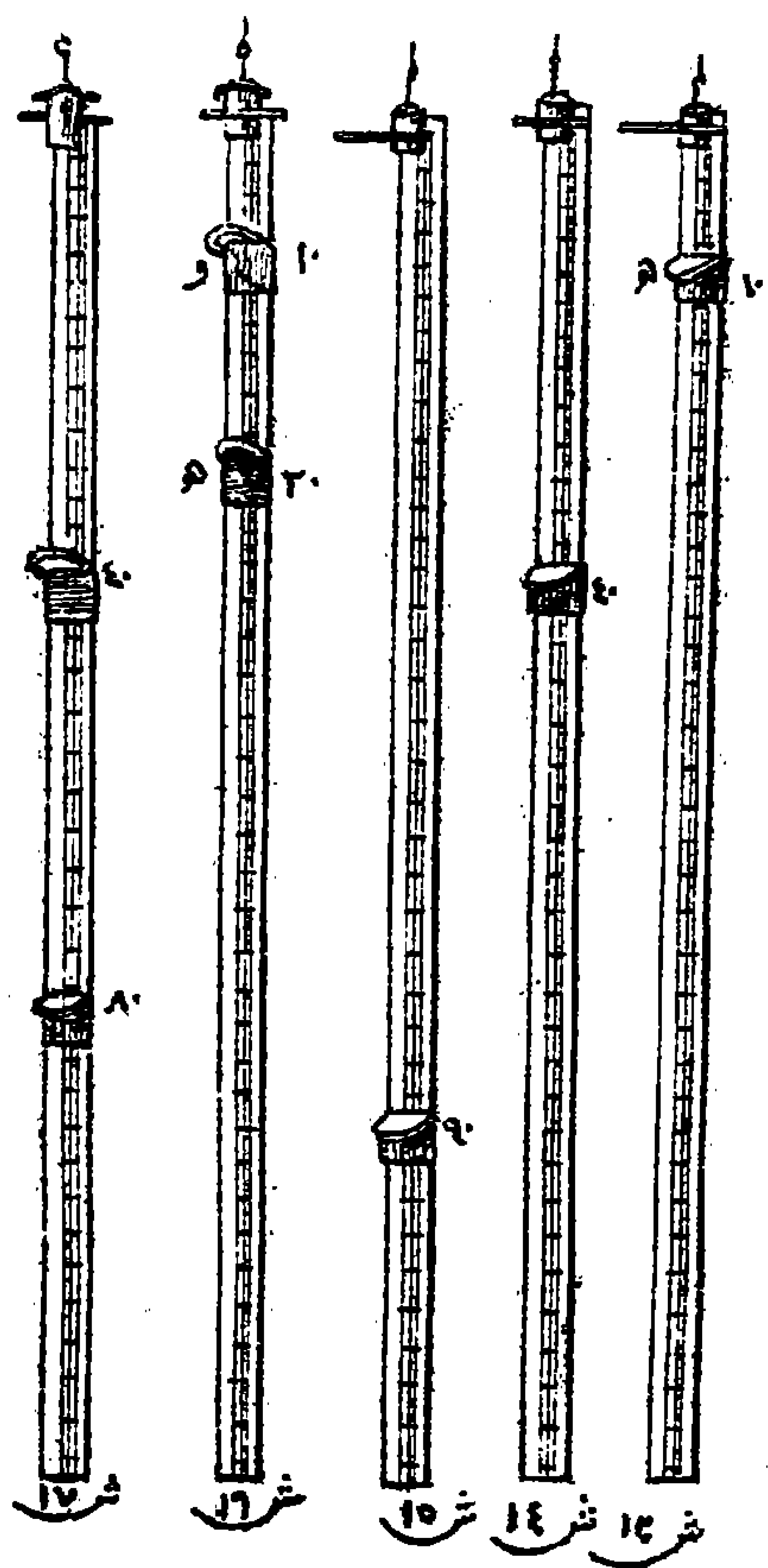
ولكن من المعلوم أن مجموع الأعداد الفردية الأولى التى عددها ن هى ن² فحينئذ المسافات المحسوبة من ابتداء اللحظة الابتدائية هى مناسبة لمربعات الأزمان

آلة آتود


ش ١٢

تتركب آلة آتود من بكرة خفيفة ح ش ١٢ يمر على مقرها خيط رفيع من الحرير يحمل فى طرفيه ثقلين ه ، ه يحدثان مع بعضهما توازنا فاذا وضع على احد هذين الثقلين ثقل اضافى ء فيتحرك الثقلان والخيط فى الاتجاه الذى وضع فيه هذا الثقل وبما ان الثقل ء يحرك اثناء سقوطه الثقلين ه ، ه ينتج أن حركته تكون بطيئة عنها اذا سقط بمفرده فى الفراغ وبذا تكون هذه الحركة سهلة المشاهدة ومقاومة الهواء للجسم غير محسوسة

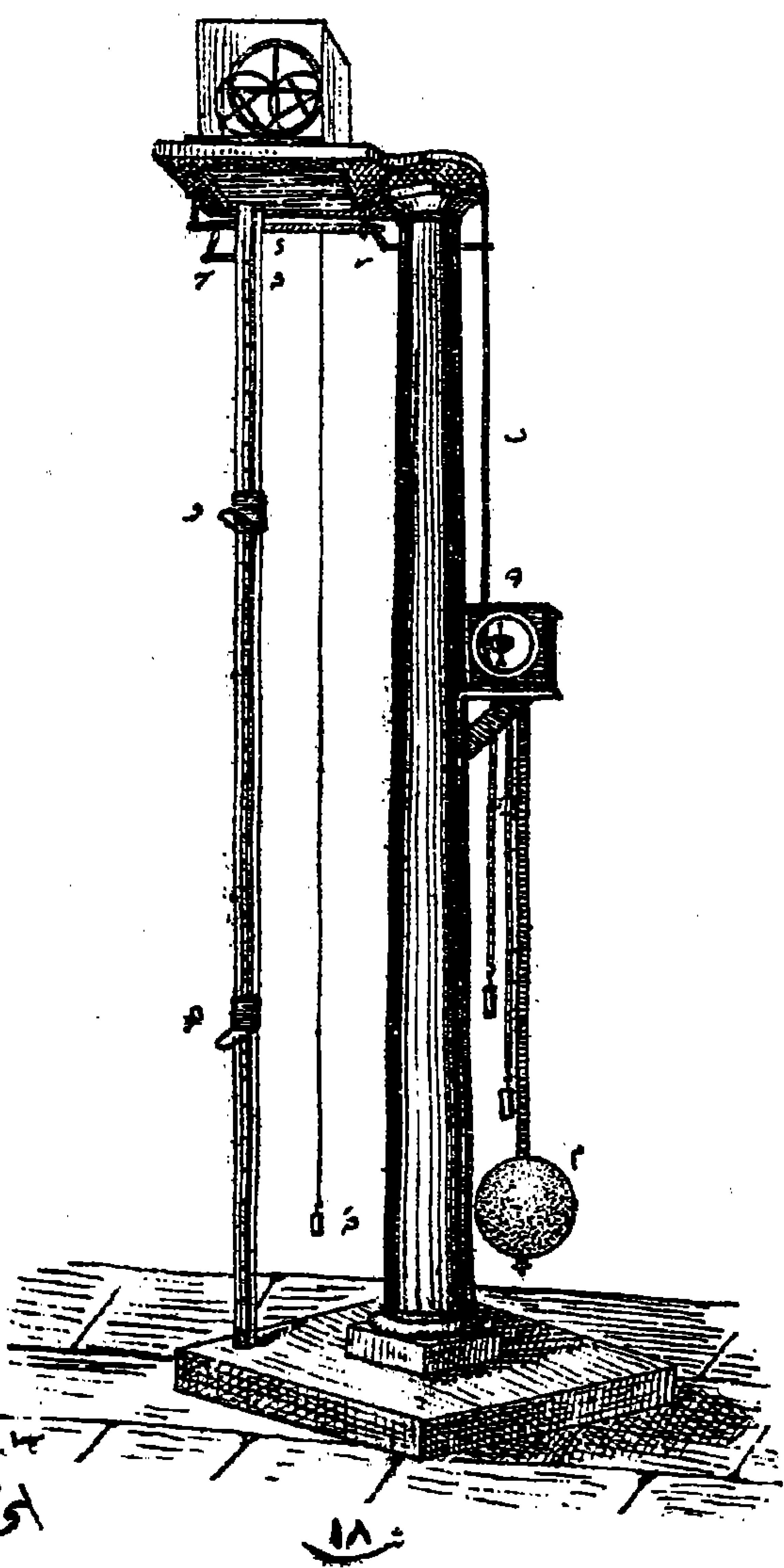
قانون المسافات ـ لأجل تعيين القانون الذى تتغير تبعا له المسافات التى يقطعها الجسم الساقط فى الازمنة المتتالية تستعمل مسطرة رأسية مقسمة يسقط أمامها الثقل ه+ء فيوقف أولا هذا الثقل أمام صفر المسطرة الى اللحظة التى تبتدئ فيها ثانية معينة يعرف ابتداؤها بدق ساعة ثم يبحث بالاستقراء أى باعادة التجربة عدة مرات عن النقطة من المسطرة التى يلزم ان يوضع فيها قرص افقى هـ ينزلق على المسطرة بواسطة فكين يمكن تثبيتها عليها بواسطة مسمار مقلوظ ش ١٣ حتى يسمع ملامسة الثقل الساقط له مع دق الساعة الدال على انتهاء الثانية فتعلم



حينئذ المسافة مَ التى تقطع فى ثانية ثم تعين بهذه الطريقة على التوالى المسافات مً ، مًّ التى تقطع فى ثانيتين ثم فى ثلاث ثوان وهكذا شر ١٤ ، شر ١٥ فبمقارنة هذه النتائج ببعضها يرى أن المسافات مَ ، مً ، مًّ مناسبة للأعداد ١ و ٤ و ٩ أعنى لمربعات الازمنة وهذا القانون هو ما يعبر عنه بقانون المسافات

قانون السرع

اذا أريد قياس السرع المكتسبة فى الاوقات المختلفة من الحركة تستعمل حلقة و تنزلق على المسطرة بنكيت شر ١٦ وهذه الحلقة تسمح بمرور الثقل له منها من غير ان يلامسها وتعيق سير الثقل الاضافى ء لطول شكله فتوضع أولا الحلقة و على القسم مَ بحيث انها تمنع الثقل الاضافى ء من السقوط بعد الثانية الاولى فبعد هذه اللحظة يتحرك الثقل له حركة منتظمة بالسرعة التى كان عليها عند حذف الثقل الاضافى ء فيحث حينئذ كما سبق عن النقطة من المسطرة اللازم وضع القرص هـ فيها حتى يسمع صوت مصادمة الثقل له فى انتهاء ثانية بعد ايقاف الثقل ء فالبعد بين النقطتين و ، هـ يكون عبارة عن المسافة التى تقطع فى ثانية اثناء هذه الحركة المنتظمة اعنى السرعة التى اكتسبها الجسم بوصوله الى نقطة و وحفظها اثناء تحركه من و الى هـ وليكن سَ هذه السرعة ثم تعين بهذه الطريقة السرع سً ، سًّ ، الخ التى اكتسبها الجسم بعد ثانيتين شر ١٧ ثم ثلاث ثوان والخ فيوجد ان سَ ، سً ، سًّ ، الخ مناسبة للاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، الخ أعنى مناسبة للازمنة وهذا القانون هو ما يسمى بقانون السرع وآلة أتود المستعملة الآن لاثبات قانونى سقوط الاجسام مبينة بتمامها فى شر ١٨


شر ١٨

و توجد معادلتان جبريتان لبيان قانونى سقوط الاجسام فى الفراغ وهما

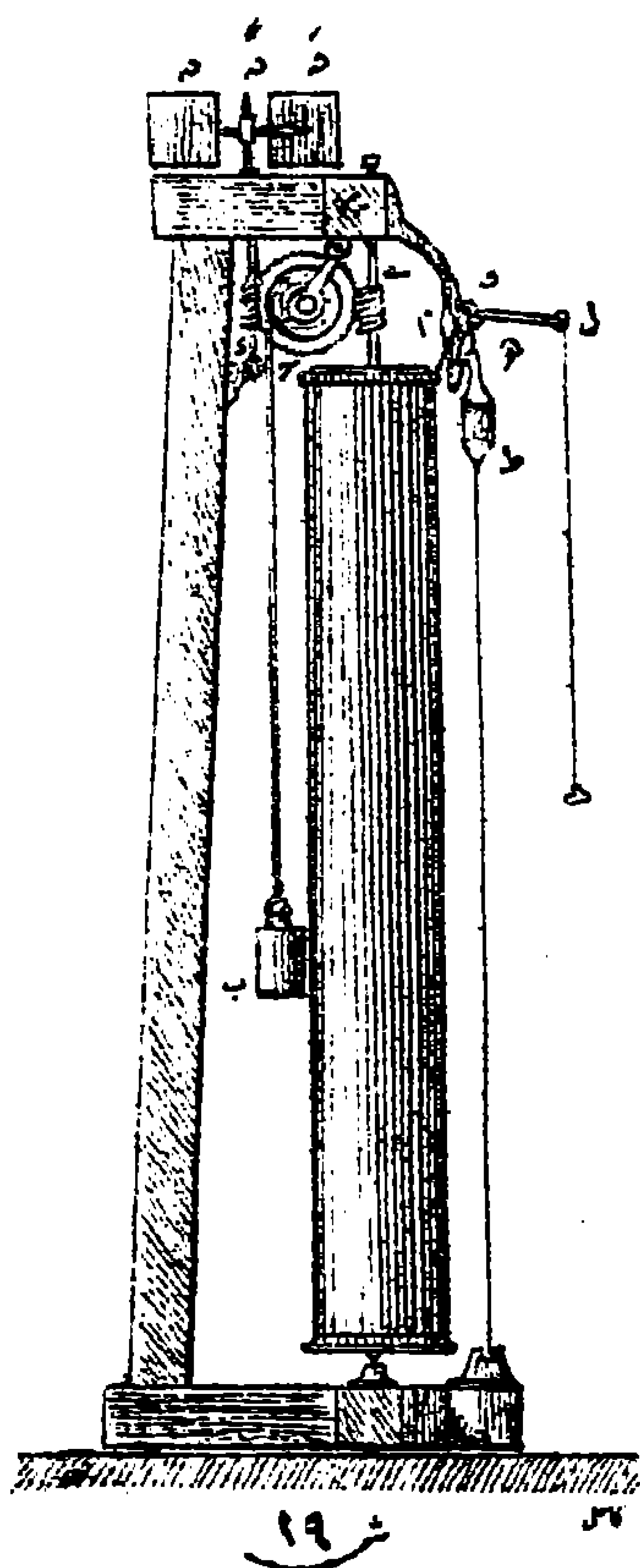
$$م = \frac{ج}{٢} ز^{٢} \quad ، \quad س = ج ز$$

وفى هاتين المعادلتين م تدل على المسافة التى يقطعها الجسم ، ز الزمن المستعمل لقطع هذه المسافة ، س السرعة

التى يكتسبها الجسم بعد الزمن ز أما حـ فهو عدد ثابت يدل على المقدار الذى تزيد به سرعة الأجسام الساقطة فى الفراغ فى كل ثانية ويسمى بالعجلة وهو يختلف باختلاف العروض ومقداره فى مصر يساوى ٩٫٧٩١٢ متر

جهاز مورات

هذا الجهاز يتركب كما فى ش ١٩ من اسطوانة رأسية ا مغطاة بفرخ من الورق وتتحرك بواسطة ثقل ب يحرك الطارة حـ وهذه الطارة تتعشق من جهة مع بريمة غير منتهية ء مصنوعة على محور الاسطوانة ومتعشقة من الجهة الثانية مع بريمة غير منتهية أيضا ء محورها الرأسى حامل لاجنحة د ، دَ ، دً تستعمل لتنظيم الحركة والثقل ط المحصور بين دليلين من المعدن يحمل قلما راسما هـ يرتكز على جسم الاسطوانة بواسطة زنبلك

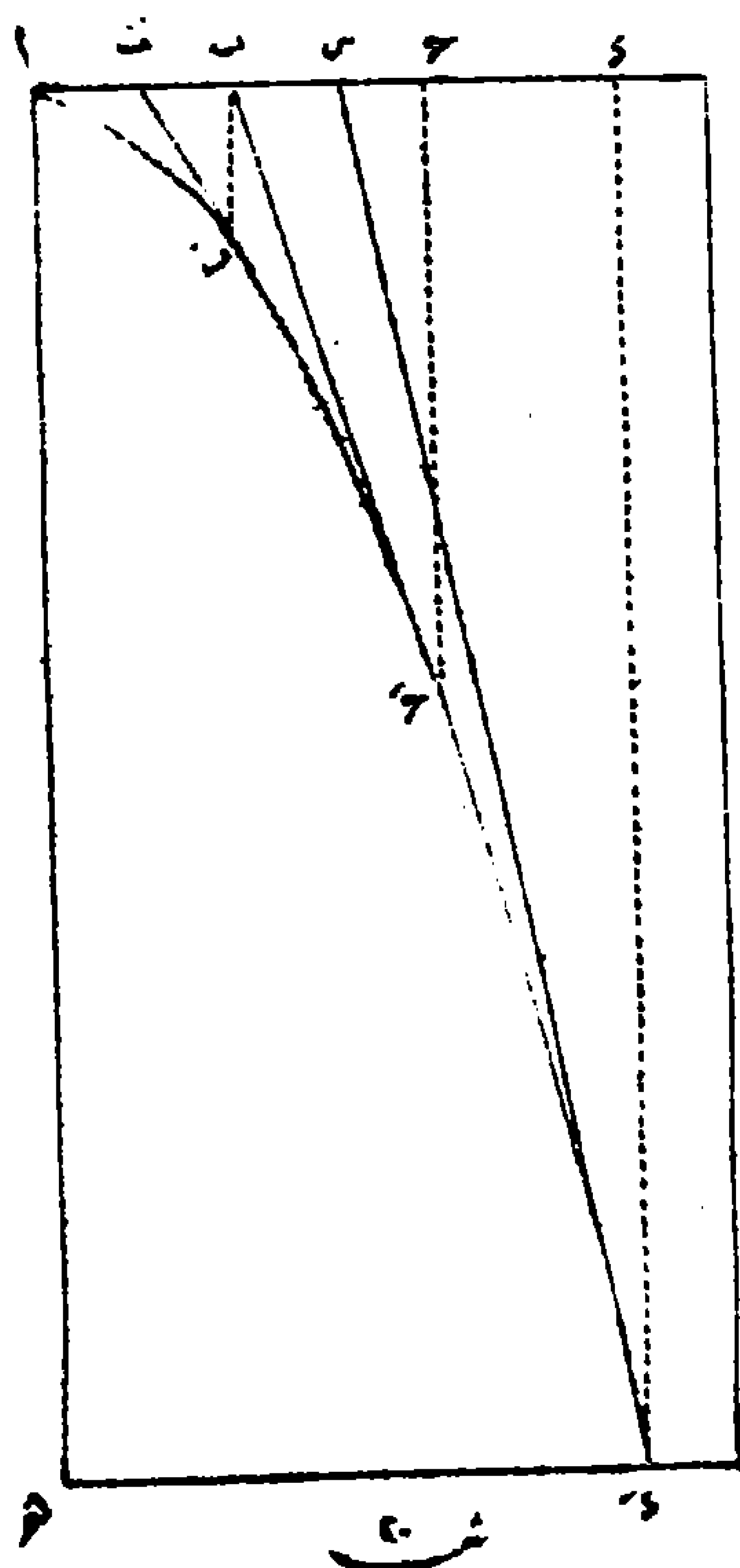


وحينما تصير حركة الاسطوانة منتظمة يترك الثقل ط ونفسه بواسطة سقاطة لوم فالقلم يرسم على الاسطوانة الخط البيانى للحركة

وهذا الجهاز له أهمية عظيمة فيسمح لدراسة حركة الجسم فى سقوطه المطلق ولايجاد المسافة المقطوعة فى مدة زمن صغير بقدر ما يراد وزيادة على ذلك فان نتائج التجارب تتعين بنفس الجسم الساقط مباشرة ولا يحتاج لمهارة المجرب

قانون المسافات

لأجل تحقيق قوانين سقوط الاجسام بواسطة المنحنى المرسوم على سطح الاسطوانة نفرد الفرخ الورق السابق ذكره بقطعه على حسب الراسم ا و ش ٢٠ ثم يؤخذ على ا ء اطوال متساوية ا ب ، ب حـ ، ..... الخ تدل على أزمان متساوية



وفى نهاية الزمن ا ب يكون الثقل موجودا فى بَ ويكون قطع فى النزول المسافة الرأسية ب بَ وفى نهاية الزمن ا حـ الذى هو ضعف ا ب يكون قطع المسافة حـ حـَ وباجراء المقياس نجد أن

$$\text{حـ حـَ} = ٤ \text{ ب بَ} = \text{ب بَ} \times ٢^{٢}$$

$$\text{ء ءَ} = ٩ \text{ ب بَ} = \text{ب بَ} \times ٣^{٢}$$

. . . .

فحينئذ تكون المسافات المقطوعة فى السقوط المطلق لجسم خارج من السكون متناسبة لمربعات الازمان المستعملة لقطعها وهذا القانون يؤدى الى النسب الآتية

$$\frac{\text{بتَ}}{\text{اب}^{2}} = \frac{\text{ححَ}}{\text{اح}^{2}} = \frac{\text{ءءَ}}{\text{اء}^{2}}$$

التى تدل على أن المنحنى هو منحنى القطع المكافئ

قانون السرع

ولاجل تحقيق قانون السرع نرسم مماسات للمنحنى من النقط تَ ، حَ ، ءَ ، .... الخ ومن المعلوم أن المماس فى نقطة تَ يمر بالنقطة ت التى هى منتصف المستقيم اب وبالمثل تكون المماسات فى النقط حَ ، ءَ مارة على التناظر بالنقط ب ، س ، .... الخ التى هى منتصفات المستقيمات اح ، اء ، ..... الخ بحيث أنه اذا فرض ان تب = ف يكون بح = ٢ف ، سء = ٣ف .... الخ وعلى ذلك اذا كانت بتَ = هـَ يكون ححَ = ٤هـَ ، ءءَ = ٩هـَ ، ..... الخ

وحينئذ اذا كان طول جزء المستقيم اء الدال على زمن مساوٍ لثانية مقداره متر فان السرع ع ، ع ، ... الخ فى النقط تَ ، حَ ، ءَ ، .... الخ تتعين بظلال الزوايا تَتب ، حَبح ، ءَسء ، .... الخ ولكن حيث ان الطول الدال على وحدة الازمان غير معلوم فنفرض ان $\frac{1}{\text{ك}}$ هو العدد المجهول الذى تضرب فيه جميع الأطوال اب ، اح ، اء ، .... الخ لاجل ان يكون الطول الدال على ثانية واحدة مساويا للمتر حينئذ يكون

$$\text{ع}_{1} = \text{بتَ} : \frac{1}{\text{ك}}\,\text{بت} = \text{ك}\,\frac{\text{تَب}}{\text{تب}} = \text{ك}\,\frac{\text{هـ}}{\text{ف}}$$

وايضا

$$\text{ع}_{2} = \text{ك}\,\frac{\text{ححَ}}{\text{بح}} = \text{ك}\,\frac{4\,\text{هـ}}{2\,\text{ف}} = 2\,\text{ع}_{1} \;،$$

$$\text{ع}_{3} = \text{ك}\,\frac{\text{ءءَ}}{\text{سء}} = \text{ك}\,\frac{9\,\text{هـ}}{3\,\text{ف}} = 3\,\text{ع}_{1} \;،$$

. . . .

ويرى من ذلك ان السرعة تكون مناسبة لزمن السقوط

وحينئذ فقوانين سقوط الأجسام تكون هى بالضبط قوانين الحركة المنتظمة المعجلة للأجسام الخارجة من السكون ويكفى حينئذ تحقيق أحد هذه القوانين حيث أن احدها يثبت الآخر

عجلة التثاقل

قد شاهدنا من جهاز موران ان الجسم قطع تقريبا ٤٫٩٠ فى الثانية الأولى من سقوطه وحينئذ فتكون عجلة التثاقل مساوية الى ٩٫٨٠ ويرمز لها بالحرف حـ ولاجل الحصول على مقدار للعجلة أكثر ضبطا من السابق يجب الالتجاء الى البندول وهاك جدولا مشتملا على بعض النتائج التى صار الحصول عليها

اسماء البلدان	عروض شمالية		مقدار العجلة حـ
مصر	٢َ	٣٠°	٩٫٧٩١٢
باريس	٥٠َ	٤٨°	٩٫٨٠٨٨
سينتبرج	٥٠َ	٥٩°	٩٫٨٢٨٩
خط الاستوا	٠َ	٠°	٩٫٧٨٠٦

ويشاهد

ويشاهد من هذا الجدول ان مقدار ح يأخذ فى الصغر من القطب الى خط الاستواء

قوانين خاصة بسقوط الأجسام فى الفراغ

أولا – فى حالة سقوط الجسم بدون سرعة ابتدائية تكون المسافة ء المقطوعة فى نهاية الزمن ن مقدرا بالثوانى هى

$$ء = \frac{ح\,ن^{٢}}{٢}$$

والسرعة ع فى نهاية الزمن ن هى

$$ع = ح\,ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء المقطوع هى

$$ع = \sqrt{٢\,ح\,ء}$$

ثانيا – فى حالة سقوط الجسم بسرعة ابتدائية عَ تكون المسافة المقطوعة فى نهاية الزمن ن هى

$$ء = عَ\,ن + \frac{ح\,ن^{٢}}{٢}$$

والسرعة فى نهاية الزمن ن هى

$$ع = عَ + ح\,ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء هى

$$ع = \sqrt{عَ^{٢} + ٢\,ح\,ء}$$

ثالثا – فى حالة قذف الجسم رأسيا من أسفل الى أعلا بسرعة ابتدائية عَ فالحركة تكون منتظمة التقصير وتكون المسافة المقطوعة فى نهاية الزمن ن هى

$$ء = عَ\,ن - \frac{ح\,ن^{٢}}{٢}$$

والسرعة فى نهاية الزمن ن هى

$$ع = عَ - ح\,ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء هى

$$ع = \sqrt{عَ^{٢} - ٢\,ح\,ء}$$

تنبيه – بناء على قانون $ع = عَ - ح\,ن$ يرى ان الجسم يرتفع كلما كانت السرعة موجبة ويصل الى نهايته العظمى فى الارتفاع حينما يكون $ع = ٠$ وحينئذ يكون $عَ = ح\,ن$

ومنها $ن = \frac{عَ}{ح}$

أعنى ان زمن الصعود يساوى $\frac{عَ}{ح}$ وبوضع هذا المقدار فى القانون $هـ = عَ\,ن - \frac{ح\,ن^{٢}}{٢}$ يحصل على أعظم ارتفاع الجسم من القانون $هـ = \frac{عَ^{٢}}{ح} - \frac{عَ^{٢}}{٢ح} = \frac{عَ^{٢}}{٢ح}$

وحينئذ يرتفع الجسم المقذوف رأسيا من أسفل الى أعلا بسرعة عَ ارتفاعا قدره $\frac{عَ^{٢}}{٢ح}$

الحركة المنحنية

اعلم ان سرعة حركة نقطة متعلق فى آن واحد بمقدارها وباتجاهها وأن سرعة الحركة المستقيمة تكون دائما

متجهة جهة الحركة وفى اتجاه خط سير المتحرك لكن سرعة الحركة المنحنية الحيثما اتفق تتغير دائما اتجاهها وكذلك مقدارها وقد يصطلح على ما يأتى فى الحركة المنحنية

أولا اذا فرض متحرك يرسم منحنيا حيثما اتفق ا م مَ ـ على حسب قانون معلوم هـ = ء (ن) وكان م ، مَ هما وضعاه فى الزمنين ن ، ن + ى فأن الانتقال المتوسط فى مسافة زمنية ى يكون هو الوتر م مَ للقوس المقطوع على خط السير فى مدة هذه المسافة

وأن مقدار واتجاه وجهة الانتقال المذكور تكون هى مقدار واتجاه وجهة الجزء المستقيم م مَ

وثانيا تكون السرعة المتوسطة هى سرعة حركة مستقيمة منتظمة التى يستعملها المتحرك فى المدة ى لقطع الوتر م مَ فى المدة المذكورة ومقدارها هى نسبة $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$

واتجاهها هو اتجاه المستقيم م مَ

وثالثا تكون السرعة فى اللحظة ن هى النهاية التى تميل اليها السرعة المتوسطة اثناء ازدياد الزمن ى حيثما يميل هذا الازدياد نحو الصفر ومقدارها هو ع = نها $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$ عندما يميل ى نحو الصفر واتجاهها هو اتجاه ماس خط السير فى نقطة م وجهتها هى جهة الحركة فى هذه النقطة

رابعا ــ نظرية ــ مقدار السرعة فى اللحظة ن هو مشتقة المسافة بدلالة الزمن

لانه من المعلوم أن ع = نها $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$ واذا ضرب البسط والمقام فى القوس م مَ يكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ} \times \text{وتر م مَ}}{\text{ى} \times \text{قوس م مَ}}$$ أعنى أن

$$\text{نها} \frac{\text{الوتر مَ م}}{\text{قوس م مَ}} \times \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ}}{\text{ى}}$$

وحيث ان نهاية النسبة الأولى مساوية للوحدة تكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ}}{\text{ى}}$$

واذا رمزنا بالرمزين هـ ، هَ للمسافتين المقطوعتين على خط السير فى الزمنين ن ، ن + ى يكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{هَ} - \text{هـ}}{\text{ى}}$$

أعنى أن ع = ءَ (ن) وهو المطلوب

خامسا والعجلة الماسة فى اللحظة ن هى مشتقة السرعة وهى متجهة على حسب اتجاه الماس للمنحنى فاذا صارت الحركة مستقيمة فأن العجلة الماسة تكون هى عين العجلة فى التحرك المستقيم المنتظم التغير وقد وصفت بالعجلة الماسة بالنظر لاتجاهها ليس إلا لأنها ليست هى العجلة الوحيدة التى تعتبر فى الحركة المنحنية

مبادئ على حركة جملة مادية غير متغيرة

تعريف ــ الجملة الغير متغيرة هى ما تكونت من جملة نقط ابعادها عن بعضها غير متغيرة

لاجل تعريف جملة غير متغيرة يلزم معرفة الأبعاد الكائنة بين ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ا ، ب ، حـ من الجملة المذكورة ثم ابعاد كل من النقط الاخرى عن الثلاث نقط المذكورة على التناظر

وضع

فوضع وحركة جملة مادية فى الفراغ تكونان مبينتين متى علم وضع وحركة المثلث ا ب ح
والحركات الابسط مايكون لجملة غير متغيرة هى الحركة الانتقالية والحركة الدورانية

الحركة الانتقالية

تعريف ـ الجملة الغير متغيرة تكون حركتها انتقالية متى كانت اضلاع مثلث مثل ا ب ح المكون لجزء منها باقية على الدوام موازية لوضعها الاصلى

وفى هذه الحركة كل مستقيم مثل م ه واصل بين نقطتين حيثما اتفق من الجملة يكون موازيا لوضعه الاصلى وجميع نقط الشكل ترسم فى آن واحد اقواسا متساوية ومتوازية بحيث تكون سرعها فى اى لحظة حيثما اتفق متساوية ومتوازية أيضا

وعليه فتكون السرعة المشتركة لجميع نقط الجملة المذكورة هى سرعة الحركة الانتقالية فى اللحظة المفروضة وتتعين كما اذا كان المعلوم حركة نقطة واحدة فقط فحركة المكبس داخل جسم الطلمبة من قبيل الحركة الانتقالية المستقيمة وحركة كفتى الميزان روبرفال من قبيل الحركة الانتقالية المنحنية

الحركة الدورانية حول محور

تعريف ـ الجسم يكون له حركة دورانية حول محور متى رسمت جميع نقطه محيطات دوائر مستوياتها عمودية على هذا المحور

وفى هذه الحركة جميع نقط الجسم ترسم فى آن واحد اقواسا متشابهة واطوالها مناسبة لانصاف اقطارها وحينئذ يكون

$$\frac{م\,م'}{و\,م} = \frac{ه\,ه'}{و\,ه}$$

وعلى ذلك اذا رمزنا بالحروف ﻫ ، ﻫ' ، ﻫ'' للمسافات المقطوعة فى آن واحد بالنقط التى ابعادها عن المحور هى نق ، نق' ، نق'' يحدث

$$\frac{ه}{نق} = \frac{ه'}{نق'} = \frac{ه''}{نق''}$$

السرعة الزاوية ـ السرعة الزاوية هى سرعة النقطة المتباعدة عن محور الدوران ببعد مساو للوحدة فاذا رمز للسرعة المذكورة بالرمز ح ولسرعة نقطة حيثما اتفق بالرمز ع ولبعد تلك النقطة عن محور الدوران بالرمز نق فأن سرعة النقطة المذكورة تكون مساوية لحاصل ضرب السرعة الزاوية فى بعدها عن محور الدوران أعنى يكون $ع = ح\,نق$

وللبرهنة على ذلك يقال حيث أن المسافات المقطوعة فى آن واحد مناسبة لابعاد النقط عن محور الدوران يكون

$$\frac{ع}{نق} = \frac{ح}{١} \quad \text{ومنه}$$

$$ع = ح\,نق$$

والحركة الدورانية تكون منتظمة أو متغيرة على حسب ماتكون السرعة الزاوية ح ثابتة أو متغيرة
ثم ان سرعة الحركة المنتظمة الدورانية تعين غالبا بعدد الدورات التى يصنعها الجسم فى مدة معينة ويسهل استخراج

السرعة الـزاوية منها

فاذا رمز بحرف ه لعدد الدورات التي يصنعها الجسم فى الدقيقة الواحدة فأن النقطة المتباعدة عن المحور ببعد مساوٍ لمتر ترسم فى مدة ستين ثانية قوسا طوله ه × ٢ ط والسرعة الزاوية تكون حينئذ هى

$$ح = \frac{ه × ٢ ط}{٦٠} = \frac{ه ط}{٣٠}$$

تمرينات

(١) المطلوب رسم الخط البيانى لحركات معلومة بالمعادلات الآتية التى فيها ع ، ع كميات موجبة

$$هـ = ع + ع ن$$

$$هـ = ع - ع ن$$

$$هـ = -ع + ع ن$$

$$هـ = -ع - ع ن$$

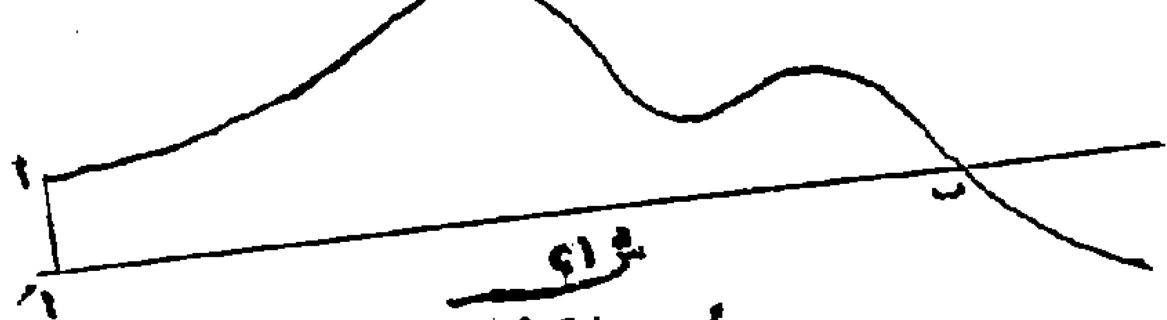
(٢) المطلوب البرهنة على ان المعادلة هـ = ع ن + ك ن٢ تدل على حركة منتظمة العجلة

(٣) المعلوم حركة بمعادلتها هـ = ن + ن٢ والمطلوب أولا رسم الخط البيانى للحركة وثانيا رسم الخط البيانى للسرعة

(٤) المعلوم حركة بمعادلتها هـ = ك ن٣ والمطلوب أولا ايضاح قانون الحركة وثانيا قانون السرعة

(٥) المطلوب ايجاد مقدار العجلة فى نهاية الزمن ن لحركة متغيرة حيثما اتفق معلومة بالمعادلة هـ = ك ن٣

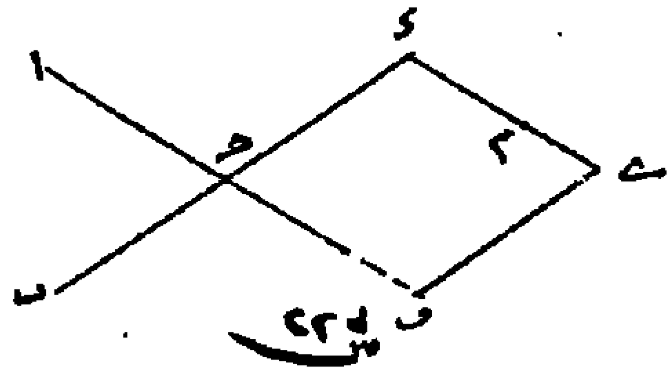
(٦) المطلوب مناقشة الحركة المعلومة بالمنحنى البيانى اب شكل



(٧) المعلوم المنحنى البيانى لحركة ما والمطلوب ايجاد المنحنى البيانى للسرع وبالعكس

(٨) المعلوم نقطة متحركة باستظام على محيط دائرة والمطلوب مناقشة حركة مسقطها على أحد اقطار الدائرة المذكورة ورسم المنحنيات البيانية

(٩) المعلوم المعين المفصلى حـ ء ـ ن مثبت فى نقطة حـ والنقطتان ا ، ب يتحركان باستظام والمطلوب مناقشة حركتى النقطة ـ والنقطة م شكل ٢٢



(١٠) المطلوب تبيين سرعة النقطة الارضية التى عرضها ل فى الحركة اليومية

(١١) المطلوب رسم الخط البيانى لقطارات السكة الحديد من بعد معلومية المعاليم الناتجة من الأدلة الخاصة بالسكة الحديد ثم معرفة اللحظة والوضع اللذين فيهما يتقابل قطارات منها بفرض أن الحركات منتظمة

الحركة المنتظمة التغيير

(١٢) المطلوب ايجاد المسافة المقطوعة فى الزمن ن بمعلومية الخط البيانى للسرع

(١٣) المطلوب البرهنة على أن مجموع المسافات المقطوعة فى لحظات متساوية البعد عن منتصف الزمن المفروض ثابت ومقدار هذا المجموع المذكور يكون بعينه كما لو كانت سرعة التحرك فى هذه اللحظات هى سرعة

منتصف

منتصف هذا الزمن ثم استنتاج معادلة المسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز

(١٤) المطلوب البرهنة على أن المسافات المقطوعة بجسم ساقط سقوطا مطلقا فى ازمان متساوية متتالية تكون مناسبة للأعداد الفردية المتتالية على التناظر

(١٥) المطلوب البرهنة على أن المسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز تكون مساوية لخارج قسمة فرق مربعى السرعتين فى نهاية وابتداء الزمن المذكور على ضعف العجلة

(١٦) السرعة المتوسطة فى زمن معين هى المتوسط العددى للسرعتين المقطوعتين فى ابتداء وانتهاء الزمن المذكور وهى مساوية للسرعة المقابلة لمنتصف هذا الزمن

(١٧) المطلوب البرهنة على أن منتصف ازدياد مربع السرعة يكون مساويا لحاصل ضرب العجلة فى المسافة المقطوعة

(١٨) المطلوب معرفة الزمن الذى فى نهايته يرتقى المقذوف الخارج بسرعة من أسفل الى ارتفاع ء ثم مناقشة القانون

(١٩) من بعد معلومية أن الجسم المقذوف رأسيا من اسفل الى أعلا يمر مرتين فى نقطة معينة فما هو البرهان على أن سرعته فى النقطة المذكورة فى كل من المرتين تكون واحدة

تركيب الحركات

المتحرك لا يكون له سرعة حركة واحدة فى الفراغ ولدراسة هذه الحركة تعتبر غالبا كأنها محصله جملة حركات آنيه فاذا تدحرجت كرة على ظهر سفينة سائرة فى نهر فأن مجموع الاوضاع التى تأخذها الكرة المذكورة على ظهر السفينة تكون هى الحركة النسبية لهذه الكرة بالنسبة للسفينة ولكن بالنسبة لراصد موجود على شاطئ النهر فأن الكرة المذكورة لا تكون لها هذه الحركة النسبية فقط بل تكون لها حركة مشتركة ايضا مع السفينة وحينئذ فالحركة الحقيقية للكرة أو حركتها المطلقة يمكن اعتبارها كمحصلة حركتين آنيتين ومعرفة الحركات المركبة يوصل لتعيين الحركة المطلقة للمتحرك

ففى المثال السابق يمكن فى كل لحظة معرفة وضع السفينة بالنسبة للشاطئ ووضع الكرة بالنسبة للسفينة ثم تعيين وضع الكرة فى الفراغ

وعلى ذلك فيحصل على خط السير الحقيقى للكرة وعلى النقطة التى توجد فيها على خط السير المذكور فى لحظة ما وحينئذ فحركة الكرة تكون معينة تعيينا تاما والحركات المركبة يمكن تعددها فالنهر مثلا يشترك مع الارض فى الحركة اليومية ويشترك معها ايضا فى حركتها السنوية وهكذا

وعلى أى حال فان الحركة المطلقة للمتحرك يمكن استنتاجها دائما من الحركات المركبة وسنتكلم على بعض الحالات البسيطة لتركيب الحركات فنقول

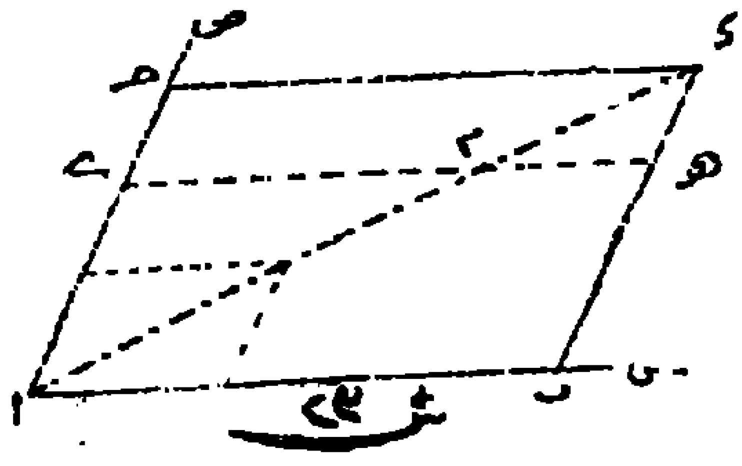
تركيب الحركات عبارة عن ايجاد حركة متحرك له جملة حركات آنيه ويلزم لذلك أولا تعيين خط سير المتحرك وثانيا تعيين سرعته فى كل لحظة من الحركة

الحركات المنتظمة

تركيب حركتين آنيتين مستقيمتين ومنتظمتين

متوازى أضلاع السرع

نظرية – متوازى أضلاع السرع – محصلة الحركتين الانيتين المستقيمتين المنتظمتين هى حركة مستقيمة ومنتظمة وأن سرعة الحركة المحصلة تبين مقدارا واتجاها بقطر متوازى الأضلاع المنشأ على سرعتى الحركتين المركبتين



فاذا فرض ان نقطة مثل ا شـ٤٣ تتحرك بانتظام على المستقيم اس اثناء تحرك المستقيم المذكور بالتوازى لنفسه بحيث أنه عندما تأتى النقطة ا فى نهاية الزمن ز فى نقطة ب من المستقيم اس تكون النهاية ا من المستقيم المذكور قطعت بانتظام المسافة اح من المستقيم اص ويأتى المتحرك حينئذ فى نقطة ء ويكون حء = اب

فنبرهن اولا على أن المتحرك يسير من ا الى ء على اتجاه القطر اء لمتوازى الأضلاع ولذلك نبحث عن وضع المتحرك فى نهاية زمن ما زَ عندما يأتى المستقيم اب فى الوضع ےھ وحينئذ يقال حيث أن الحركة منتظمة يكون $\frac{اے}{اح} = \frac{زَ}{ز}$

ولكن فى اثناء الزمن زَ تقطع النقطة ا المسافة س على الاتجاه اب ويكون

$$\frac{س}{اب} = \frac{زَ}{ز}$$ ومنها يحدث

$$\frac{س}{اب} = \frac{اے}{اح}$$

لكن من تشابه المثلثين اےم ، احء وبناء على كون حء = اب يكون

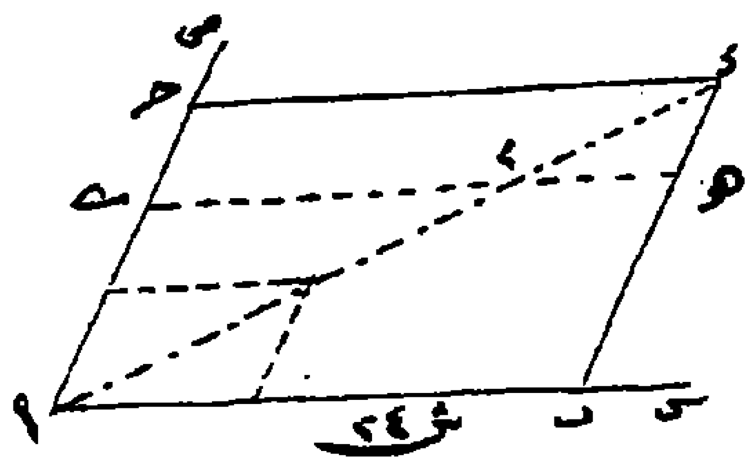
$$\frac{ےم}{اب} = \frac{اے}{اح}$$ وعليه يكون

$$س = ےم$$

وحينئذ فالنقطة ا تسير دائما على اء

وثانيا نبرهن على أن المتحرك يتحرك على القطر المذكور بانتظام

ولذلك يقال أنه من النسب $\frac{اے}{اح} = \frac{ام}{اء} = \frac{زَ}{ز}$ شـ٤٤ يرى ان نقطة ا تتحرك على اء بحركة منتظمة حيث ان المسافتين ام ، اء متناسبة لزمنى قطعهما



وثالثا نبرهن على أن سرعة المتحرك تكون معينة بقطر متوازى الاضلاع المنشأ على سرعتى الحركتين المركبتين

ولذلك يقال انه اذا فرض ان اع ، اعَ يدلان على سرعتى الحركتين المركبتين فأن اع يدل على سرعة الحركة المحصلة حيث أنه عبارة عن المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن وجميع القوانين الخاصة بمتوازى اضلاع القوى من علم الاستاتيك يمكن تطبيقها على متوازى أضلاع السرع

تحميلنا ١٠١٠١

حينئذ اذا رمزنا بالرمزين ع ، ع للسرعتين المركبتين وبالحرف ع للسرعة المحصلة يكون

$$ع^٢ = ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ٢ع_١ ع_٢ جتا ا$$

$$\frac{ع}{حا ا} = \frac{ع}{حا (ا+ب)} = \frac{ع_١}{حا ا} = \frac{ع_٢}{حا ب}$$

نتيجة اذا كانت السرعتان على استقامة واحدة فأن المحصلة تكون مساوية لمجموعهما ان كانتا متجهتين في جهة واحدة ولفرقهما ان كانتا متجهتين في جهتين متضادتين

كثير اضلاع السرع

اذا كان لنقطة مادية عدد حيثما اتفق من السرع الآنية فأنه يمكن تعيين محصلتها بتكوين كثير اضلاع السرع كما في حالة القوى في الاستاتيك

متوازي سطوح السرع

محصلة ثلاث سرع آنية ليست موجودة في مستو واحد يمكن ايجادها بواسطة متوازي سطوح السرع كما في حالة القوى من علم الاستاتيك أيضا واذا كانت السرع المذكورة متعامدة يكون بناء على ما تقدم أيضا

$$ع^٢ = ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ع_٣^٢$$

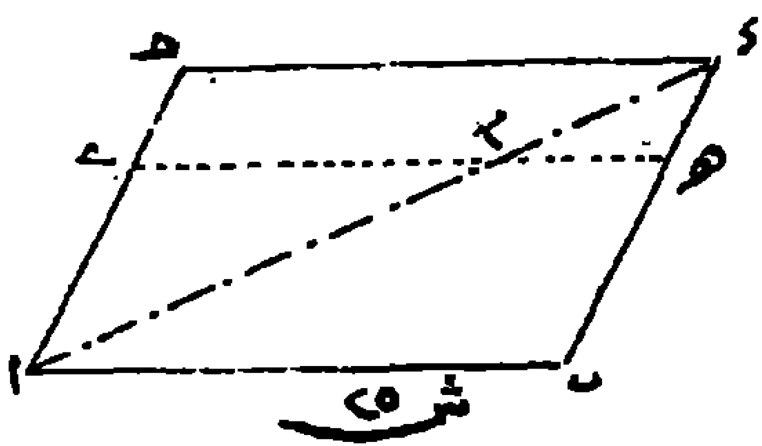
$$ع_١ = ع حتا ا$$

$$ع_٢ = ع حتا ب$$

$$ع_٣ = ع حتا حـ$$

الحركات المنتظمة التغيير

نظرية – محصلة الحركتين الآنيتين المستقيمتين المنتظمتي العجلة الخاليتين من السرعتين الابتدائيتين هي حركة مستقيمة ومنتظمة التغير وأن عجلة الحركة المحصلة هي قطر متوازي الاضلاع المنشأ على عجلتي الحركتين المركبتين



فاذا فرض ان نقطة ا شـ ص تتحرك على المستقيم ا ب بحركة منتظمة العجلة وبدون سرعة ابتدائية بحيث انها تأتي في نقطة ب في نهاية الزمن ز اثناء تحرك الخط ا ب بالتوازي لنفسه بحركة منتظمة العجلة أيضا ونهايته ا تقطع المسافة ا حـ في مدة الزمن ز المذكور فان النقطة ا تأتي في نقطة ء في نهاية هذا الزمن ويكون حـ ء = ا ب

فنبرهن أولا على أن المتحرك يسير من ا الى ء على القطر ا ء من متوازي الاضلاع ولذلك نفرض ان ـ هـ هو الوضع الذي يشغله المستقيم ا ب في نهاية الزمن ز َ فيكون

$$\frac{ا ـ}{ا ء} = \frac{زَ^٢}{ز^٢}$$ بموجب ما تقدم

ولكن في اثناء الزمن زَ المذكور يكون المتحرك قطع المسافة س على اتجاه المستقيم ا ب ويكون

$\frac{س}{اب} = \frac{ن^٢}{ن^٢_١}$ ومنها يحدث

$\frac{س}{اب} = \frac{اﻫ}{اج}$

ولكن حيث أن $\frac{ﻫم}{جو}$ أو $\frac{ﻫم}{اب} = \frac{اﻫ}{اج}$ يكون

$س = ﻫم$

وحينئذ فالنقطة م تكون موجودة دائما على اء ويكون حينئذ خط سيرها مستقيما ومتجها في اتجاه قطر متوازى الاضلاع اب ءج

وثانيا نبرهن على أن المتحرك يتحرك بحركة منتظمة التغير

ولذلك يقال أنه من النسب $\frac{ام}{اء} = \frac{اﻫ}{اج} = \frac{ن^٢}{ن^٢_١}$ يتضح أن حركة النقطة م منتظمة التغير

وثالثا نبرهن على أن عجلة المتحرك تكون مبينة بقطر متوازى الاضلاع المنشأ على عجلتى الحركتين المركبتين لأنه اذا كان ن هى الوحدة الزمنية فيكون اب ، اج ، اء هى انصاف عجلات الحركتين المركبتين والحركة المحصلة

فاذا كان ب ، بَ هما عجلتا الحركتين المركبتين ، ف هى عجلة الحركة المحصلة فانه يحدث

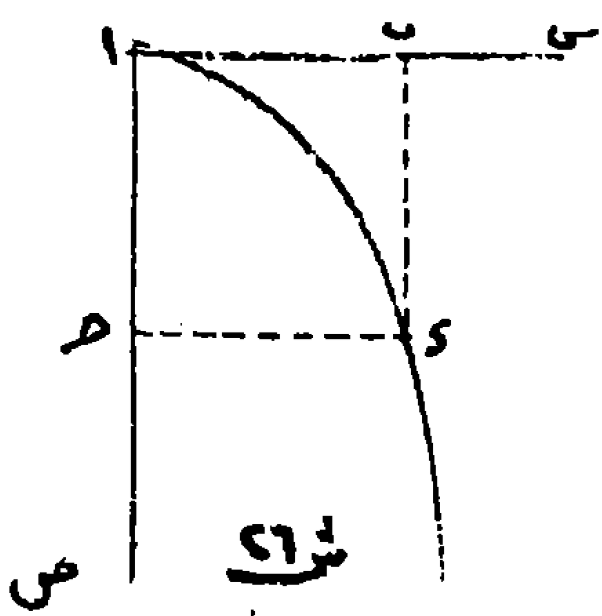
$ف^٢ = ب^٢ + بَ^٢ + ٢ ب بَ جتا ا$

الحركة المنتظمة ـ الحركة المنتظمة التغير

حركة المقذوفات

الجسم المقذوف افقيا ـ اذا اعتبرت حركة متحرك محصلة حركتين آنيتين احداها منتظمة في اتجاه الافقى اس سرعتها عَ والاخرى منتظمة العجلة في اتجاه الرأسى اص عجلتها ح

فانه في نهاية الزمن ن يكون المتحرك في نقطة ء التى هى رأس المستطيل اب ءج شكل ٢٦ الذى فيه



$اب = عَ ن$ (١)

$اج = \frac{ح ن^٢}{٢}$ (٢)

وحينئذ من معادلة (١) يحدث

$ن = \frac{اب}{عَ}$

وعليه تؤول معادلة (٢) الى

$اج = \frac{ح}{٢} \times \frac{اب^٢}{عَ^٢}$

ومنها يكون $\frac{اب^٢}{اج} = \frac{٢عَ^٢}{ح}$ لكن $\frac{٢عَ^٢}{ح}$ كمية ثابتة

فحينئذ تكون الاحداثيات الرأسية لخط السير اء المقطوع بالمتحرك مناسبة لمربعات الاحداثيات الافقية وعليه فيكون قطعا مكافئا محوره اص ورأسه نقطة ا واذا جعل اب = ص ، اج = س ، $\frac{عَ^٢}{ح} = ﻫ$ فأن المعادلة السابقة تؤول الى $ص^٢ = ٢ﻫس$.

الجسم

الجسم المقذوف على زاوية حيثما اتفقت — اذا فرض جسم مقذوف على زاوية ى بسرعة ع وكان له حركتين آنيتين احداهما منتظمة فى اتجاه اب والأخرى منتظمة التغير منسوبة للتثاقل ومتجهة من اعلاه الى اسفل بعجلتها ح وكان المطلوب معرفة خط السير فانه يلزم تعيين وضع المتحرك فى نهاية الزمن ز

خط السير — اذا لم يكن للمتحرك سوى السرعة ع فى نهاية الزمن ز فانه يقطع المسافة شكل ٤٧ الناتجة من المعادلة

$$ا ب = ع ز$$

ولكن فى هذه المدة يؤثر التثاقل عليه ويخفضه بكمية تعلم من القانون

$$ب م = \frac{ح ز^2}{2}$$

وحينئذ فالمتحرك يكون موجودا فى نقطة م ويكون وضع النقطة م معينا اذا علم ا ء ، ء م

ولذلك نفرض أن ا ء = س ، ء م = ص مع ملاحظة أن ء م = ب ء - ب م وحينئذ يحدث

$$س = ع ز حا ى \quad .....(١)$$

$$ص = ع ز حا ى - \frac{ح ز^2}{2} \quad ....(٢)$$

شكل ٤٧

وبواسطة هاتين المعادلتين يمكن تعيين وضع المتحرك فى أى لحظة فاذا حذف الزمن ز من معادلتى (١) ، (٢) فانه يتحصل على معادلة خط السير هكذا

$$ص = س طا ى - \frac{ح س^2}{2 ع^2 حا^2 ى}$$

وهى معادلة القطع المكافئ

سعة الرمى — اذا فرض ان ه هى النقطة التى فيها يأتى المتحرك ثانيا على الأفقى المار بنقطة الابتداء فان المسافة ا ه تسمى بسعة الرمى وفى هذه النقطة ه يكون الاحداثى الرأسى معدوما وحينئذ يمكن ايجاد مقدار سعة الرمى بجعل ص = ٠ فى قانون (٢) والبحث فى معادلة (١) عن مقدار س المقابل له لكن متى كان ص = ٠ فيكون

$$ع ز حا ى - \frac{ح ز^2}{2} = ٠ \quad \text{أو}$$

$$ز (ع حا ى - \frac{ح ز}{2}) = ٠$$

وهذه المعادلة الاخيرة تحقق بجعل ز = ٠

وفى هذه الحالة يكون المتحرك فى نقطة الابتداء ا التى فيها يكون الاحداثى الرأسى معدوما وتحقق ايضا بجعل ع حا ى = $\frac{ح ز}{2}$ الذى يكون مطابقا للنقطة ه ولكن فى هذه الحالة

$$ز = \frac{2 ع حا ى}{ح} \quad .....(٣)$$

وبوضع مقدار ن هذا فى معادلة (١) يتحصل

$$\text{س} = \text{ع جتاى} \times \frac{\text{٢ع جاى}}{\text{جـ}} = \frac{\text{٢ع}^2\ \text{جاى جتاى}}{\text{جـ}} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ع}^2\ \text{جا٢ى}}{\text{جـ}}$$ وهو مقدار السعة المطلوب (٤)

السعة الأعظم ما يمكن — اذا غيرت الزاوية التى يقذف عليها المقذوف عليها بسرعة ثابتة ع فان سعة الرمى تتغير ولكن حيث أن المعامل جا٢ى يصل الى نهاية العظمى اذا كان جا٢ى = ١ وفى هذه الحالة يكون

$$\text{٢ى} = ٩٠^\circ \quad ، \quad \text{ى} = ٤٥^\circ$$

فحينئذ متى قذف المقذوف على زاوية قدرها ٤٥° فان سعة رميه تكون أعظم ما يمكن وفى هذه الحالة قانون (٤) يؤول الى $\text{س} = \frac{\text{ع}^2}{\text{جـ}}$

وهى أكبر مسافة أفقية يقطعها جسم مقذوف بسرعة ع وتسمى لسعة الرمى الأعظم ما يمكن فاذا كان الجسم مقذوفا رأسيا بنفس السرعة ع فانه يرتفع بناء على ما تقدم بالارتفاع $\text{ء} = \frac{\text{ع}^2}{\text{٢جـ}}$ وحينئذ سعة الرمى الأعظم ما يمكن تكون ضعف الارتفاع الذى يرتقى اليه الجسم المذكور اذا قذف رأسيا بنفس السرعة

ارتفاع الرمى — أكبر مقدار للرأسى ص يسمى بارتفاع الرمى أو سهم الرمى ولاجل الحصول عليه يلزم ان يبحث عن النهاية العظمى للاحداثى ص ولاجل ذلك نحل المعادلة (٢) بالنسبة للزمن ن فيحدث

$$\text{ن} = \frac{\text{ع جاى} \pm \sqrt{\text{ع}^2\ \text{جا}^2\text{ى} - \text{٢جـص}}}{\text{جـ}} \quad \ldots\ldots \quad (٥)$$

ولكن حيث ان مقدار ن حقيقيا فيلزم أن يكون

$$\text{ع}^2\ \text{جا}^2\text{ى} - \text{٢جـص} \geqslant ٠$$ ومنه يحدث

$$\text{ص} \leqslant \frac{\text{ع}^2\ \text{جا}^2\text{ى}}{\text{٢جـ}}$$

وحينئذ فالنهاية العظمى لمقدار ص تكون

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}^2\ \text{جا}^2\text{ى}}{\text{٢جـ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

والمتحرك يصل الى النقطة الاعلى ما يكون فى نهاية الزمن

$$\text{ن} = \frac{\text{ع جاى}}{\text{جـ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

وبمقارنة معادلة (٧) بمعادلة (٣) يشاهد أن أكبر ارتفاع يطابق لنقطة ـ التى هى منتصف المستقيم اهـ وحينئذ فالزمن الذى يستعمله المتحرك فى النزول يكون عين الزمن الذى يستعمله للصعود والمتحرك فى مدتين متساويتى البعد عن الزمن المقابل للنقطة الأعلى ما يكون يكون على ارتفاع واحد لانه بناء على معادلة (٢) يرى ان الاحداثى الرأسى ص دالة بدرجة ثانية بالنسبة للزمن ن وعليه فخط السير يكون متماثلا بالنسبة الى المحور ـ د ويكون قطعا مكافئا رأسه نقطة د

الارتفاع

الارتفاع الاعظم ما يمكن - حيث ان ارتفاع الرمى يتغير تبعا للزاوية ى فيكون نهايته عظمى اذا كانت جاى = ١ أو ى = ٩٠°

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (٦) يكون

$$ص \text{ أو } ء = \frac{ع^{2}}{2ج}$$

وحينئذ فالمقدار $\frac{ع^{2}}{2ج}$ يكون هو اعظم ارتفاع يرتقى اليه المقذوف بسرعة ع

تنبيه - فى حالة ما يكون ى = ٤٥° فأن جاى = $\frac{1}{2}$ ويكون

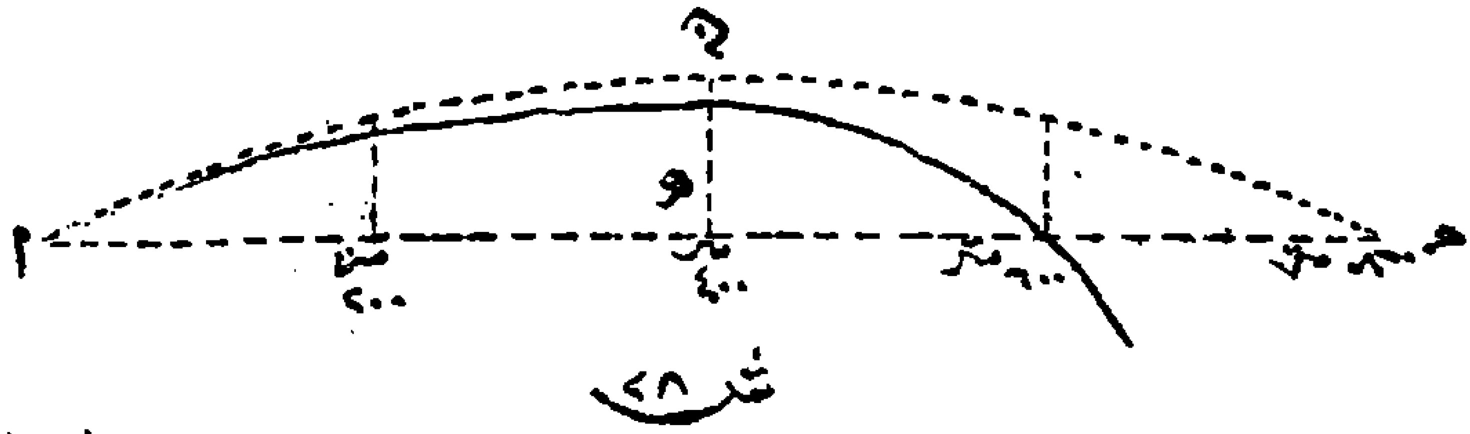
$$ء = \frac{ع^{2}}{4ج}$$

وهو نصف مقدار الارتفاع السابق أعنى انه فى حالة ما يكون ى = ٤٥° تكون سعة الرمى اكبر من سهمها بأربع مرات

حركات المقذوفات فى الهواء

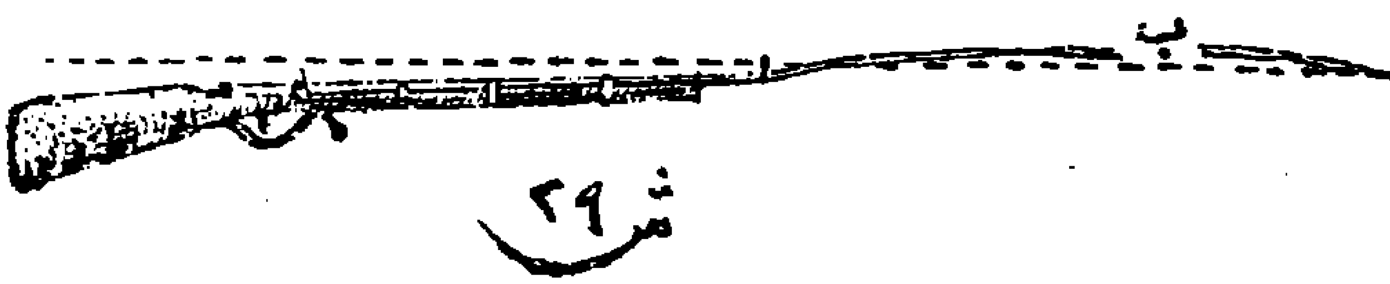
اعلم ان مقاومة الهواء تغير النتائج السابقة وتغيير شكل خط السير يحدث تقليل ارتفاع الرمى وسعته والفروقات الحادثة محسوسة كما يرى من شكل ٢٨

حيث ان الخط المجزء فى الشكل المذكور يدل على خط السير النظرى والخط المتصل يدل على خط السير فى الهواء



ش ٢٨

ولاجل الوصول الى نقطة معينة ـ يلزم قذف المقذوف على زاوية معينة ويتوصل لذلك بواسطة النشانجاه الذى به يمكن جعل ميل البندقية على الزاوية اللائقة



ش ٢٩

الحركات الظاهرية

تعريف - الحركة الظاهرية لنقطة ما بالنسبة لأخرى هى حركة النقطة الأولى مشاهدة لراصد واقف فى النقطة الثانية

ولأيجاد الحركة الظاهرية أو النسبية تستعمل القاعدة الآتية المنسوبة الى المعلم غليلى

قاعدة الحركات النسبية - الحركات النسبية لجملة نقط لا تتغير اذا اعطى للجملة المذكورة حركة انتقالية حيثما اتفقت

وهذه القاعدة المحققة بنتائجها تعتبر بديهية فى علم الميكانيكا

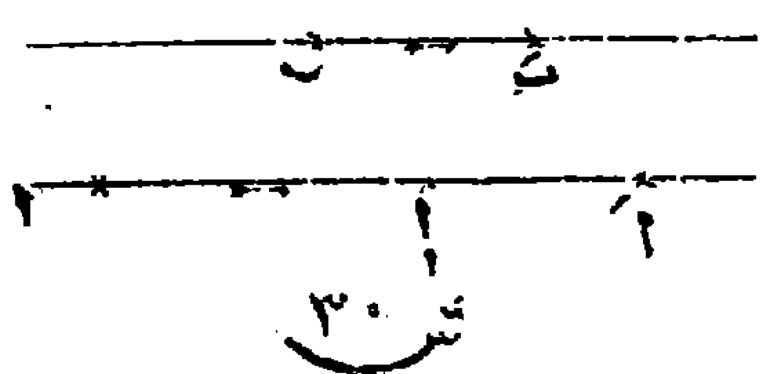
فاذا فرض ان ا، ب نقطتان متحركتان وكان المطلوب ايجاد الحركة الظاهرية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب يعطى للمجموعة حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة نقطة ب وحينئذ فالحركة النسبية لا تتغير بناء على ما ذكر وعلى هذا فنقطة ب تبقى ساكنة وأما نقطة ا فتكون لها حركتان آتيتان

احداهما حركتها الخاصة والثانية الحركة الانتقالية وحينئذ فمحصلة هاتين الحركتين تكون هى الحركة الظاهرية المطلوبة

وقد تسمى حركة النقطة الموجود بها الراصد بالحركة الجاذبة

ولنبحث الآن بواسطة هذه الطريقة عن بعض حركات نسبية بسيطة جدا بفرض ان حركات النقط منتظمة

الحركة النسبية لنقطتين متحركتين على مستقيمين متوازيين – أولا متى كانت الحركتان متحدتى الجهة وفرض ان نقطة ا شكل ٣٠ قطعت فى زمن ما المسافة اا َ بحركة منتظمة وأن ب نقطة أخرى قطعت فى نفس الزمن بحركة منتظمة المسافة ب ب َ وأن المستقيمين اا َ ، ب ب َ متوازيان وكان المطلوب ايجاد الحركة النسبية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فتثبت نقطة ب باعطاء المجموع حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة النقطة ب

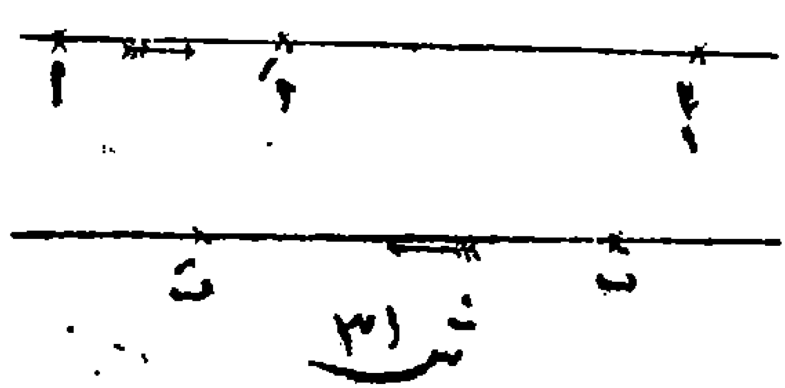


وحينئذ فى نهاية الزمن ز المفروض تصل نقطة ا الى ا َ بحركتها الخاصة ولكن بسبب الحركة الانتقالية تكون نقطة ا َ قد انتقلت الى ا ً بحيث يكون ا ً ا َ = ب ب َ وحينئذ تكون نقطة ا قد قطعت المسافة اا ً واذا اعتبر أن الزمن مساو لثانية واحدة فالطول اا ً يكون دالا على سرعة الحركة النسبية وعليه اذا رمز بحرف ع لسرعة الحركة النسبية المذكورة وبحرفى ع ، ع َ لسرعتى نقطتى ا ، ب يكون

$$ع = ع - ع َ$$

وحينئذ فى حالة ما تكون الحركتان فى جهة واحدة تكون السرعة النسبية مساوية للفرق بين السرعتين المطلقتين

وثانيا – متى كانت الحركتان متضادتى الجهة وفرض ان اا َ ، ب ب َ سرعتا المتحركين وكان المطلوب ايجاد السرعة الظاهرية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فتعطى المجموع حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة النقطة ب وحينئذ فنقطة ب تصير ساكنة ونقطة ا تكون قد قطعت المسافة اا َ بحركتها الخاصة ، ا َ ا ً = ب ب َ بسبب الحركة الانتقالية وحينئذ تكون نقطة ا قد قطعت المسافة اا ً وعليه يكون

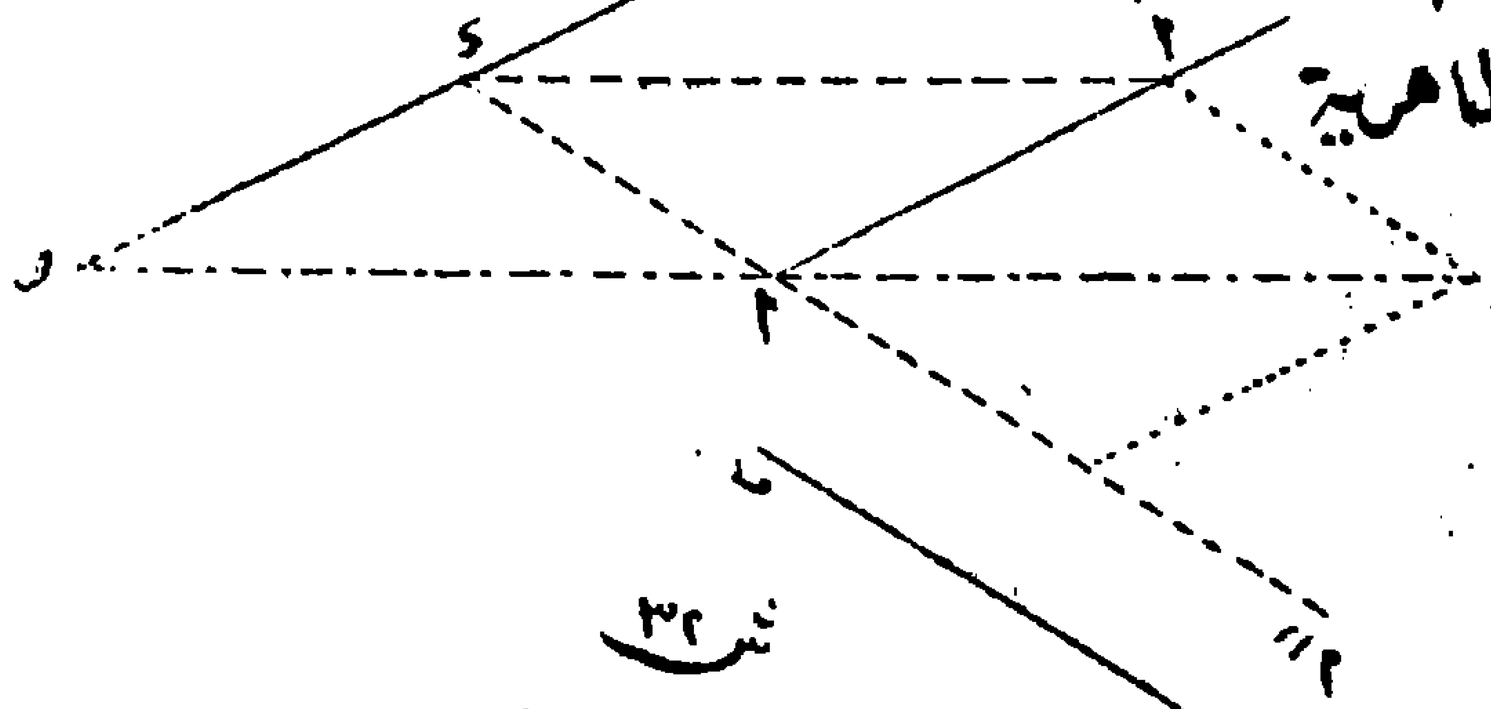


$$ع = ع + ع َ$$

وينتج من ذلك أنه متى كانت الحركات مختلفتى الجهة تكون السرعة النسبية مساوية لمجموع السرعتين المطلقتين وهذا ما يوضح السرعة العظيمة التى يشاهدها ركاب قطارين سائرين فى جهتين متضادتين

الحركة

الحركة الظاهرية لنقطتين متحركتين على مستقيمين حيثما اتفق - اذا فرض أن ٢٢ ، ٮ ٮ سرعتا الحركتين المطلقتين لنقطتي ٢ ، ٮ فتعطى المجموعة الحركة الانتقالية التي تثبت نقطة ٮ وحينئذ تكون نقطة ٢ لها سرعتان احداهما ٢٢َ وهي سرعتها الخاصة والثانية ٢٢ً وهي السرعة الانتقالية وبتحصيلهما معا يحصل على ٢٢ التي هي سرعة الحركة الظاهرية



وحينئذ فالراصد الواقف في نقطة ٮ يشاهد ان نقطة ٢ تنتقل على اتجاه القطر ٢٢ بسرعة مبينة بطول هذا القطر وعلى هذا يرى أن البحث عن الحركات الظاهرية يؤول الى تحصيل الحركات الآتية

ولنذكر الارتباطات الواقعة بين السرعة النسبية والسرعة المطلقة لنقطة مادية متحركة وبين سرعة نقطة الابتداء أي النقطة المنسوب اليها الحركة النسبية فنقول

أولا أن السرعة النسبية هي محصلة السرعة المطلقة للنقطة المادية المتحركة وسرعة نقطة الابتداء مأخوذة في الجهة المضادة

وثانيا - اذا مد ٢٢ً من جهة ٢ على استقامته وأخذ عليه ٢ء = ٢٢ً فأن ٢ء يكون عبارة عن سرعة نقطة الابتداء فاذا وصل ءَ يكون ٢ ء ٢َ ٢ متوازى اضلاع ويكون ٢٢َ قطراً له وينتج ان السرعة المطلقة للنقطة المتحركة تكون محصلة السرعة النسبية وسرعة نقطة الابتداء مأخوذة في الجهة الأصلية لها

وثالثا - اذا مد ٢٢ على استقامته من جهة ٢ وأخذ عليه ٢و = ٢٢ ووصل مستقيم وء فأن ٢ء يكون قطرا لمتوازى الاضلاع ٢٢َ ء و وتكون حينئذ سرعة نقطة الابتداء محصلة السرعة المطلقة للنقطة المتحركة والسرعة النسبية مأخوذة في الجهة المضادة

في انتقال الحركات

تنقسم الحركات الأصلية الى أربعة أقسام كالآتي

الأول الحركة المستقيمة المستمرة

الثانى الحركة المستقيمة المترددة

الثالث الحركة المستديرة المستمرة

الرابع الحركة المستديرة المترددة

وكل من الحركات المذكورة يمكن نقله الى حركة أخرى من جنسه أو مغايرة له وهذا يؤدى الى ستة عشر انتقالا للحركة كل منها يحصل بطرق مختلفة بحسب النتيجة المطلوبة

ويمكن بيان الانتقالات الستة عشر كالآتي

حركة مستقيمة مستمرة
- الى حركة مستقيمة: مستمرة / مترددة
- الى حركة مستديرة: مستمرة / مترددة

حركة مستقيمة مترددة
- الى حركة مستقيمة: مستمرة / مترددة
- الى حركة مستديرة: مستمرة / مترددة

حركة مستديرة مستمرة
- الى حركة مستقيمة: مستمرة / مترددة
- الى حركة مستديرة: مستمرة / مترددة

حركة مستديرة مترددة
- الى حركة مستقيمة: مستمرة / مترددة
- الى حركة مستديرة: مستمرة / مترددة

وهذه الحركات تستعمل فى الآلات الميكانيكية وغيرها بحسب لزومها ويتخذ لها الاعضاء اللازمة لامكان حصولها فمثلا لنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستديرة مستمرة تستعمل السيور والطنابير والطنابير المدرجة والاسطوانات المحتكة مع بعضها والتعاشيق الاسطوانية والمخروطية والتعاشيق ذات الفانوس وغير ذلك ولنقل الحركة المستقيمة المترددة الى حركة مستديرة مستمرة تستعمل الاذرعة والمنوبلات ومتوازى اضلاع وات والبلانسيه

ولنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستقيمة مترددة تستعمل الاكسنتريكات

ولنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستقيمة مستمرة تستعمل البريمات والملاوفيف

ولنقل الحركة المستقيمة المستمرة الى حركة مستقيمة مستمرة يستعمل البكر والاحبال وهكذا

تمرينات

(١) المطلوب تحصيل حركتين مختلفتين

(٢) اذا قذف جسم على زاوية قدرها ى بسرعة قدرها ع فما هو اتجاهه ومقدار سرعته فى نهاية الزمن ز واجراء المناقشة

(٣) على اى زاوية يمكن قذف جسم بسرعة ع بحيث يصل نقطة احداثياها ه ، ك وتحديد نقط المستوى الذى يمكن ان يصله المقذوف وتعيين القطع المكا فئ المحقق للعمل

(٤) ما مقدار السرعة التى قذف بها مقذوف افقيا بعد معلومية أنه قطع افقيا مسافة قدرها ء ورأسيا مسافة قدرها هـ

(٥) المطلوب ايجاد الحركة النسبية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فى الأحوال الآتية

أولا بفرض ان نقطة ا هى المتحركة فقط

ثانيا بفرض ان نقطة ا ثابتة ونقطة ب هى المتحركة

ثالثا بفرض ان نقطة ا تسقط رأسيا بحركة منتظمة العجلة ونقطة ب متحركة افقيا بحركة منتظمة

(٦) سفينة تتقدم فى اتجاه ما بسرعة قدرها ع وأن الريح متجهة فى اتجاه آخر بسرعة عَ والمطلوب معرفة الاتجاه الذى يأخذه دليل الرياح

(٧) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية لنقطة ثابتة بالنسبة لنقطة أخرى خط سيرها مضلع

(٨) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية للشمس مشاهدة من سطح الأرض

(٩) اذا كان متحركان يتحركان على مضلعين مختلفين فما تكون الحركة النسبية لأحدهما بالنسبة للآخر

(١٠) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية لكوكب مشاهد من سطح الأرض

الديناميك

القواعد الأساسية

الديناميك علم يبحث فيه عن الارتباطات الواقعة بين القوى وبين الحركات التى تحدثها قوانين علم الديناميك مؤسسة على أربع قواعد اساسية ناتجة من مشاهدة الظواهر وهذه القواعد لم تكن بديهية فى مبدأ الأمر بل أن رجالا من العلماء مثل كيبلير وغليلى ونيوتون هم الذين استكشفوها من بين الحركات المختلفة التى نشاهدها وتلك القواعد لا يمكن تحقيقها مباشرة بل انها تحقق بالمطابقة الحاصلة بين نتائجها وبين الحركات المشاهدة

القاعدة الاولى – القصور الذاتى

(كيبلير)

قاعدة القصور الذاتى – أولا أن النقطة المادية الساكنة لا يمكن ان تحرك من نفسها وثانيا أن النقطة المادية المتحركة لا يمكن من نفسها ان تغير سرعتها مقدارا واتجاها وحينئذ فتكون حركتها مستقيمة ومنتظمة ان لم تقاوم بتأثير خارجى

ويمكن التسليم بالجزء الأول من قاعدة القصور الذاتى وأما الجزء الثانى فيرى أنه مناقض لما هو مشاهد للعيان حيث ان سرعة جميع الأجسام التى يصير تحركها تتناقص الى ان تنعدم ولكن يلزم أن يفهم ان ذلك ناشئ عن الاحتكاك ومقاومة الاواسط وهكذا اذ أنه بمجرد تقليل تأثير هذه الأسباب المقاومة تطول مدة الحركة عما كانت قبلا ويعلم من ذلك حينئذ أنه اذا أمكن اعدام تلك المقاومات فأن السرعة تصير ثابتة

وينتج من قاعدة القصور الذاتى مباشرة امران

الأول أن حركة نقطة مادية يلزم ان تكون ناشئة عن اسباب خارجية مؤثرة على هذه النقطة أو سبق تأثيرها عليها

الثانى ان كل نقطة لا يقع عليها ادنى تأثير خارجى تكون ساكنة أو ذات حركة مستقيمة منتظمة

أما الانسان والحيوانات فتتحرك بالارادة لأنه يوجد فيهم أمر غير مادى وغير منقاد لقوانين القصور الذاتى

والقصور الذاتى للمادة يوضح ظواهر عديدة منها أن الانسان الواقف فى عربة سارت فجأة يميل للوقوع فى الجهة العكسية لحركة العربة حيث ان قدميه مجذوبان بالعربة وجزئه العلوى مائل للبقاء فى محله ويحصل عكس ذلك اذا وقفت العربة دفعة واحدة

ومنها أنه اذا نقل بدون احتراس اناء مملوء بالماء فان الماء يندفق فى الجهة العكسية لحركة الأناء المذكور

ومنها حصول الخطر عند الوثوب بدون احتراس من عربة سائرة لأنه عند ما تلامس الأرجل سطح الارض يكون الجزء العلوى من الجسم مستمرا فى الحركة بالسرعة المكتسبة ويحصل تصادمه مع الأرض بقوة تكون عظيمة كلما كانت الحركة سريعة

ومنها لتثبيت القدوم فى نصابه يلزم طرق النصاب المذكور فى مانع ثابت وحينئذ فالقدوم يستمر فى الحركة مع زنق الياف خشب النصاب

واخيرا فالقصور الذاتى ايضا هو الذى يوضح لنا اسباب المصائب الجسيمة الناشئة عن تصادم سفينتين أو قطارين متحركين بسرعتين عظيمتين

القاعدة الثانية - الفعل ورد الفعل

(نوتون)

التساوى بين الفعل ورد الفعل - اذا أثرت نقطة مادية على نقطة مادية اخرى فأن النقطة الأخيرة تؤثر على الأولى بقوة مساوية ومضادة للتأثير الواقع عليها منها

وباستعمال نص منطوق نوتون يقال ان رد الفعل يكون دائما مساويا للفعل ومخالفا له فى الجهة فمثلا اذا ضغط باليد على طاولة فأنه يستشعر بحصول رد ضغط من الطاولة المذكورة على اليد

واذا

واذا أرْسِيَت السفينة على شيئ ثابت فى الشاطئ بواسطة حبل فان السفينة المذكورة تقرب من الشيئ المذكور كما لو كان جذب تلك السفينة حاصلا من الشاطئ بقوة مساوية ومضادة للأولى فهذه القوة الأخيرة التى ترى أنها آتية من الشيئ الثابت هى عبارة عن رد الفعل

واذا لم تحدث الأرض رد فعل مائل فلا يتيسر السير عليها كما يتضح ذلك من الصعوبة التى تنشأ من السير على أرض رخوة أو على سطح أملس

والالتصاق الحاصل بين عجل وابور اللوكوموتيف وبين قضبان السكة الحديد هو السبب فى امكان سير اللوكوموتيف عليها وجذب القطر معه

تنبيه — بناء على قاعدة القصور الذاتى تكون كل قوة مؤثرة على نقطة مادية مثل ا صادرة من نقطة مادية أخرى مثل ب وحينئذ بناء على القاعدة الحالية تكون نقطة ب متأثرة دائما بقوة صادرة من نقطة ا وعلى هذا فهاتان القوتان وهما تأثير نقطة ب على ا ورد فعل نقطة ا على ب تكونان متساويتين ومختلفتى الجهة ومتجهتين فى اتجاه المستقيم اب وزيادة على ذلك تكون هاتان القوتان قوتى جذب أو دفع على حسب كونهما تميلان لتنقيص المسافة اب أو لازديادها

القاعدة الثالثة — الحركة النسبية
(غليلى)

عدم تعلق حالة سكون أو حركة جسم بتأثير القوة الواقعة عليه — تأثير أى قوة على نقطة مادية لا يتعلق بالحركة المكتسبة من قبل بهذه النقطة وهذه القاعدة تسمى غالبا بقانون الحركة النسبية لانه بناء على هذه القاعدة متى كانت جملة غير متغيرة ونقطة غير مرتبطة بها متحركتين حركة واحدة انتقالية مستقيمة ومنتظمة ثم تأثرت النقطة المذكورة بقوة فالحركة التى تأخذها بالنسبة للجملة المذكورة اعنى حركتها النسبية تكون عين الحركة التى تأخذها تلك النقطة لو كانت النقطة والجملة المذكورتين ساكنتين فى الأصل

وبعبارة أخرى يقال أن الحركة النسبية غير متعلقة بحركة الجذب وسنشتغل بدراسة بعض أحوال مهمة مستنتجة من هذه القاعدة فنقول

الحركة الناشئة من قوة ثابتة

تعريف — القوة تكون ثابتة متى كان اتجاهها وشدتها ثابتين وقد توجد ثلاث حالات مختلفة بحسب ما تكون النقطة المادية خارجة من السكون أو لها سرعة ابتدائية فى اتجاه القوة أو كان اتجاه السرعة الابتدائية المذكورة حيثما اتفق

ففى الحالتين الأوليين ينشأ عن القوة الثابتة حركة مستقيمة منتظمة التغير

الحالة الأولى — النقطة المادية خارجة من السكون — القوة الثابتة المؤثرة على نقطة مادية مطلقة خارجة من السكون تحدث لها حركة مستقيمة منتظمة العجلة

لأنه اذا فرض ان ع هي السرعة الناتجة من تأثير القوة الثابتة على النقطة المادية في نهاية الوحدة الأولى من الزمن ثم انعدم تأثير القوة في هذه اللحظة

فبناء على قاعدة القصور الذاتي تستمر النقطة المذكورة في التحرك بحركة منتظمة سرعتها ع ولكن بتأثير القوة في مدة الوحدة الثانية من الزمن يكون للمتحرك سرعة جديدة ع حيث أن القوة تؤثر على النقطة المادية كما لو كانت ساكنة وبضم هذه السرعة الجديدة الى السرعة المكتسبة تكون سرعة المتحرك في نهاية وحدتين من الزمن هي ٢ع وبالمثل في نهاية ثلاث وحدات من الزمن تكون السرعة مساوية الى ٣ع وحينئذ اذ رمزنا بالرمز $ع_ن$ للسرعة في نهاية وحدات من الزمن قدرها ن يكون

$$ع_ن = ن ع$$

أعني ان السرعة تكون مناسبة للزمن وعليه فتكون الحركة منتظمة العجلة وحيث ان القوة ثابتة الاتجاه فتكون الحركة مستقيمة

الحالة الثانية — النقطة المادية لها سرعة ابتدائية متجهة جهة القوة — متى كانت نقطة مادية لها سرعة ابتدائية واقع عليها قوة ثابتة في اتجاه السرعة المذكورة تكون حركة تلك النقطة مستقيمة ومنتظمة التغير وحيث ان هذه القوة يمكن ان تؤثر في جهة السرعة الابتدائية أو في الجهة المضادة فيقال

أولا — اذا كانت القوة متجهة في جهة السرعة الابتدائية تكون الحركة منتظمة العجلة

لأنه اذا كانت ا هي السرعة الابتدائية ، ب السرعة التي يكتسبها المتحرك في نهاية ثانية واحدة بتأثير القوة المذكورة فبالبرهنة كما في الحالة الأولى يرى ان السرعة ع في نهاية الثانية الأولى تتركب من السرعة الابتدائية ا ومن السرعة ب ويكون

$$ع_١ = ا + ب$$

$$ع_٢ = ا + ٢ب$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ع_ن = ا + ن ب$$

وعلى هذا فتكون الحركة منتظمة العجلة وعجلتها ب

وثانيا — اذا كانت القوة متجهة في جهة مضادة لجهة السرعة الابتدائية تكون الحركة منتظمة التقصير

لأنه حيث كانت العجلة متجهة في جهة مضادة لجهة السرعة الابتدائية فيلزم تغيير ب بالمقدار −ب في القوانين السابقة وحينئذ يكون

$$ع_١ = ا - ب$$

$$ع_٢ = ا - ٢ب$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ع_ن = ا - ن ب$$

وهذا

وهذا القانون الأخير هو قانون سرعة حركة منتظمة المتغير بحملتها ـ ب

وبالعكس اذا كان لنقطة مادية حركة مستقيمة ومنتظمة التغير تكون تلك النقطة متأثرة بقوة ثابتة متجهة في اتجاه الحركة المذكورة لأنه حيث كانت الحركة غير منتظمة فالمتحرك بناء على قاعدة القصور الذاتي يكون متأثراً على الدوام بقوة وهذه القوة تكون ثابتة والا فالعجلة تتزايد أو تتناقص تبعاً للقوة المذكورة وتكون أيضاً في اتجاه حركة المتحرك لأنه اذا كان للقوة في لحظة ما اتجاه مغاير لاتجاه الحركة المذكورة فالمتحرك يتبع محصلة الحركة الناشئة من القوة مع الحركة السابقة ولا يتبع حينئذ اتجاه حركته الأصلية وهذا مخالف للغرض

وعلى هذا متى كانت الحركة عجلية فالقوة تكون في جهة السرعة الابتدائية ومتى كانت تقصيرية فتكون القوة في الجهة المضادة

تنبيهان

الأول ـ التثاقل قوة ثابتة ـ لأنه قد شوهد فيما تقدم ان حركة جسم ساقط في الفراغ بتأثير التثاقل منتظمة العجلة وحينئذ فثقل الجسم يؤثر في كل مكان كقوة ثابتة

الثاني ـ كل قوة تؤثر بمفردها على جسم لا يمكن ان تحدث له حركة منتظمة

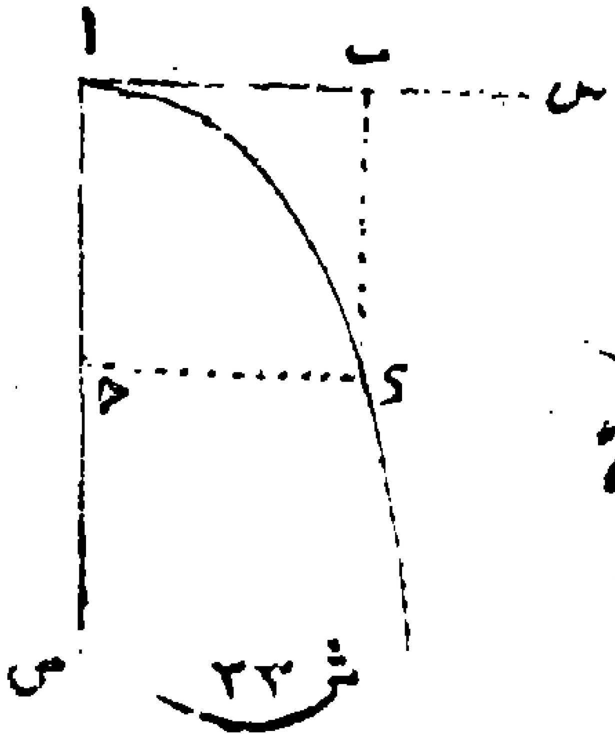
لأن الحركة المستقيمة المنتظمة يمكن ان تنتج أولاً من قوة انقطع تأثيرها بحيث ان الجسم يستمر بعد ذلك في التحرك بناء على سرعته المكتسبة وثانياً من استمرار انعدام عجلة القوة المحركة بتأثير الاحتكاك أو بسبب آخر

ويفهم من ذلك حينئذ انه اذا كان جسم متحرك بانتظام فلا يكون متأثراً بادنى قوة أو ان القوى الواقعة عليه تكون متزنة

وهذا ما يعبر عنه بالتوازن الديناميكي في مقابلة التوازن الاستاتيكي الذي يستلزم ان يكون الجسم ساكناً

وحينئذ لأجل ان يكون للعربة سرعة منتظمة على طريق افقي يلزم ان يحدث المحرك بالاستمرار جذباً مساوياً للمقاومات اللازم ان تتغلب عليها لأنه لو كان الجذب أكبر من المقاومات المذكورة لكانت الحركة عجلية

ولا يخفى أن التأثير اللازم حصوله يتناقص كلما نقص الاحتكاك كما هو مشاهد بالنسبة للعربات التي تسير على قضبان من الحديد



الحالة الثالثة ـ السرعة الابتدائية ليست في اتجاه القوة

اذا فرض مثلاً نقطة مادية ثقيلة مقذوفة في اتجاه غير رأسي اب كما في شكل ٣٣ يقال أنه لو لم تكن النقطة ثقيلة لتحركت بناء على السرعة الابتدائية حركة مستقيمة منتظمة كما تقدم وانه اذا سقطت تلك النقطة بتأثير التثاقل فقط لكانت حركتها

مستقيمة ومنتظمة التغير كما تقدم أيضا

ولكن بناء على القاعدة الثالثة هاتان الحركتان توجدان فى آن واحد بدون أن تؤثر إحداهما على الأخرى وحينئذ فتحصل الحركة الحقيقية للمقذوف على فرض أنه ساقط على اتجاه الخط الرأسى اح مع اعتبار انتقال الرأسى المذكور بالتوازى لنفسه بحيث ان النقطة ؟ المذكورة تقطع المستقيم اب بحركة منتظمة سرعتها السرعة الابتدائية أعنى انه بتحصيل الحركة المستقيمة المحدودة بالسرعة الابتدائية مع الحركة المستقيمة المنتظمة التغير الناتجة من التثاقل كما تقدم يكون خط السير الناتج قطعا مكافئا

تنبيهان

الأول ـ اعلم ان سرعة المتحرك المذكور فى لحظة ما هى محصلة سرعة الحركة المنتظمة وسرعة الحركة المتغيرة فى اللحظة المذكورة

الثانى ـ حيث انه عند انعدام تأثير القوة فى لحظة ما تصير الحركة مستقيمة ومنتظمة فتكون سرعة المتحرك فى لحظة ما عين سرعة الحركة المنتظمة التالية للحركة المتغيرة فى تلك اللحظة التى ينقطع فيها تأثير القوة

القاعدة الرابعة

(غليلى)

عدم تعلق تأثيرات القوى الآنية ببعضها ـ اعنى انه اذا اثرت جملة قوى آنية على نقطة مادية فتأثير كل منها يكون حاصلا كما لو كانت كل قوة مؤثرة بمفردها

وحينئذ اذا خرج المتحرك من السكون فالحركة الناتجة من تلك القوى الآنية تحصل بناء على ما تقدم بتركيب الحركات المختلفة المستقيمة والمنتظمة التغير الناتجة من القوى المذكورة كما لو كان كل منها مؤثر بمفرده وعليه فتكون الحركة المحصلة مستقيمة ومنتظمة التغير وعجلتها محصلة عجلات الحركات المركبة لها وهذه الحركة الأخيرة تكون بالضبط هى حركة محصلة القوى الآنية المذكورة المحصلة بناء على قاعدة كثير اضلاع القوى اذا اثرت تلك المحصلة بمفردها على النقطة المادية المفروضة

تنبيهان

الأول ـ اذا كان للنقطة المادية سرعة ابتدائية فتحصل حركتها بتركيب الحركة المستقيمة المنتظمة المقابلة لتلك السرعة الابتدائية مع الحركة المستقيمة المنتظمة التغير التى تحدثها لها محصلة القوى الواقعة عليها عندما تكون تلك النقطة خارجة من السكون

الثانى ـ اذا كانت محصلة القوى الواقعة على النقطة المادية معدومة فتأثيرات تلك القوى يمحو بعضها بعضا والنقطة المادية تصير كما لو كانت غير متأثرة بأدنى قوة

فان لم يكن للنقطة المادية المذكورة سرعة ابتدائية فانها تسكن والقوى الواقعة عليها لا تحدث لها أدنى حركة وتكون متزنة توازنا استاتيكيا

وان كان

وان كان لتلك النقطة سرعة ابتدائية فأنها تكون متحركة حركة مستقيمة منتظمة والقوى المذكورة لا تغير حركتها وتكون متزنة توازنا ديناميكيا

ومن القاعدة الرابعة المذكورة يستنتج التقدير الديناميكي للقوى

التقدير الديناميكي للقوى

قد تقدم في علم الاستاتيك كيفية تقدير القوى بالديناموميتر الذي يقتضي فيه انتكون تلك القوى متزنة وسنرى أن الحركة الناتجة من هذه القوى تؤدي أيضا الى تعيين شدتها اعني نسبتها الى الكيلوجرام في التناسب الحاصل بين القوى الثابتة وبين العجلات - نظرية - النسبة بين القوتين الثابتتين الواقعتين بالتوالي على نقطة مادية واحدة كالنسبة بين العجلتين الناتجتين منهما

أعني اذا كان ق ، ق̄ قوتين ثابتتين ، و ، و̄ العجلتين الناتجتين منهما متى اثرتا على نقطة مادية واحدة على التوالي يكون

$$ق : \bar{ق} :: و : \bar{و}$$

لانه اذا كان للقوتين ق ، ق̄ المذكورتين مقياس مشترك قدره ق١ يكون

$$ق = ح\, ق_1 ،$$

$$\bar{ق} = \bar{ح}\, ق_1 \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{ق}{\bar{ق}} = \frac{ح}{\bar{ح}}$$

واذا فرض ان و١ هي العجلة الناتجة من القوة الثابتة ق١ الواقعة على النقطة المفروضة فأن العدد ح من القوى ق١ الواقعة في آن واحد على تلك النقطة يحدث بناء على القاعدة الرابعة عجلة قدرها ح و١ وحينئذ فالعجلة و الناتجة من القوة ق تكون مساوية الى ح و١ والعجلة و̄ الناتجة من القوة ق̄ تكون حينئذ مساوية الى ح̄ و١ اعني يكون

$$و = ح\, و_1 ، \quad \bar{و} = \bar{ح}\, و_1 \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{و}{\bar{و}} = \frac{ح}{\bar{ح}} \quad \text{وعليه يكون}$$

$$\frac{ق}{\bar{ق}} = \frac{و}{\bar{و}} \quad \text{وهو المطلوب برهانه}$$

وحيث ان هذه النظرية حقيقية مهما كان صغر مقدار المقياس المشترك ق١ فيمكن البرهنة على صحتها أيضا اذا لم يكن للقوتين ق ، ق̄ مقياس مشترك فنقول

نفرض ان $ق = ح\, ق_1$ ، $و = ح\, و_1$

وحيث انه في هذه الحالة لا تشتمل القوة ق̄ على عدد صحيح من القوى الجزئية ق١ فحينئذ يكون مقدارها محصورا بين عددين صحيحين متواليين رمزهما ح̄ ، ح̄ + ١ من القوى الجزئية المذكورة وبناء عليه يكون

$$\bar{ح}\, ق_1 < \bar{ق} < (\bar{ح} + 1)\, ق_1$$

وبالقسمة على ق = ن م يحدث

$$\frac{\text{ن}'}{\text{ن}} < \frac{\text{ق}'}{\text{ق}} < \frac{\text{ن}'+1}{\text{ن}}$$

وحيث ان عجلة القوة ن م تساوى ن و وعجلة القوة (ن' +١) م تساوى (ن' +١) و فتكون العجلة وَ للقوة قَ محصورة أيضا بين العجلتين المذكورتين ويكون

$$\text{ن}'\,\text{و} < \text{و}' < (\text{ن}'+1)\,\text{و}$$

وبالقسمة على و = ن و يحدث

$$\frac{\text{ن}'}{\text{ن}} < \frac{\text{و}'}{\text{و}} < \frac{\text{ن}'+1}{\text{ن}}$$

ويرى من ذلك ان النسبتين $\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}$ ، $\frac{\text{و}'}{\text{و}}$ محصورتان بين النهايتين $\frac{\text{ن}'}{\text{ن}}$ ، $\frac{\text{ن}'+1}{\text{ن}}$ اللتين لاتفرقان عن بعضهما الا بمقدار يساوى $\frac{1}{\text{ن}}$ وهذا المقدار صغير بقدر مايراد حيث ان ن عدد اختيارى وبناء عليه تكون النسبتان $\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}$ ، $\frac{\text{و}'}{\text{و}}$ متساويتين بالضبط اعنى يكون

$$\frac{\text{ق}'}{\text{ق}} = \frac{\text{و}'}{\text{و}}$$ وهو المطلوب

ويمكن تحقيق هذه النظرية المهمة بواسطة آلة آتود بان يوقع بالتوالى ثقلان اضافيان مختلفان على ثقل كلى واحد وتعين عجلة الحركة الحادثة من كل تجربة بملاحظة ان هذه العجلة تكون مساوية ضعف المسافة المقطوعة فى مدة الثانية الأولى من السقوط

ولأجل ذلك نأخذ ابتداء ثقلين كل منهما مساوٍ الى ق وثقلا آخر اضافيا قَ ونفرض ان العجلة المتحصلة هى و ثم نأخذ ايضا ثقلين كل منهما مساو الى ق، وثقلا آخر اضافيا قَ، بحيث يكون

$$2\,\text{ق}_1 + \text{ق}'_1 = 2\,\text{ق} + \text{ق}'$$

ونفرض أن العجلة الجديدة المتحصلة هى وَ (بملاحظة أن الثقل الكلى المستعمل فى كلتا التجربتين هو أحد الثقلين ٢ق، ، ٢ق) وحيث ان القوتين قَ ، قَ، حركتا على التوالى ثقلا كليا واحدا أى أنهما اثرتا على جسم واحد على التوالى فيكفى ان يحقق من ان نسبة هاتين القوتين الى بعضهما كنسبة العجلتين الحادثتين منهما ولذلك يلزم حساب المقدار الرقمى لكل من هاتين النسبتين $\frac{\text{ق}'}{\text{ق}'_1}$ ، $\frac{\text{و}}{\text{و}'}$ والتأكد من تساوى الناتجين المتحصلين

نظرية — النسبة بين القوى المؤثرة على جسم ما وبين العجلات التى تحدثها له ثابتة

وللبرهنة على ذلك يقال حيث أنه علم مما تقدم أن نسبة القوى الى بعضها كنسبة العجلات فيكون

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}'} = \frac{\text{و}}{\text{و}'}$$ أو يكون $$\frac{\text{ق}}{\text{و}} = \frac{\text{ق}'}{\text{و}'}$$

واذا اثر على الجسم المفروض بقوة أخرى قً فانه يكون أيضا

$$\frac{\text{ق}}{\text{و}} = \frac{\text{ق}'}{\text{و}'} = \frac{\text{ق}''}{\text{و}''}$$

ويفهم من ذلك ان القوى الواقعة على جسم واحد تناسب للعجلات التى تحدثها له وهو المطلوب

فاذا كانت احدى هذه القوى هى ثقل الجسم فالعجلة تكون ح ويحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{و}} =$$

$$\frac{\text{ق}}{\text{و}} = \frac{\text{ث}}{\text{ح}}$$ ومنها يحدث

$$\text{ق} = \frac{\text{ث}}{\text{ح}}\ \text{و}$$

المجسم

تعريف — مجسم الجسم هو النسبة الثابتة بين شدة القوة المؤثرة على الجسم المذكور وبين العجلة التي تحدثها له تلك القوة وهذه النسبة الثابتة للجسم الواحد والمتغيرة من جسم الى آخر لها أهمية عظيمة في علم الميكانيك

فاذا رمزنا بحرف م لمجسم الجسم فبناء على التعريف يكون

$$\text{م} = \frac{\text{ق}}{\text{و}}$$ ومنه يحدث

$$\text{ق} = \text{م}\ \text{و}$$

أعني ان القوة تساوي حاصل ضرب مجسم الجسم المؤثرة عليه في عجلة الحركة التي تحدثها له

ومتى كانت القوة المفروضة هي ثقل الجسم فانه يكون

$$\text{م} = \frac{\text{ث}}{\text{ح}}$$

ولكن حيث ان ثقل الجسم مبين بالكيلوجرامات وعجلة التثاقل مبينة بالأمتار فلاجل ايجاد النسبة بين هذين العددين يلزم اعتبارهما مبهمين وحينئذ فيكون المجسم عددا مبهما كذلك

تنبيهان

الأول — مجسمات الاجسام تكون مناسبة لاثقالها في المحل الواحد من سطح الأرض

لأنه من المعادلة $\text{م} = \frac{\text{ث}}{\text{ح}}$ يحدث

$$\text{ث} = \text{م}\ \text{ح}$$ وبالمثل يكون

$$\text{ث}' = \text{م}'\ \text{ح}$$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{ث}}{\text{ث}'} = \frac{\text{م}}{\text{م}'}$$ وهو المطلوب

ويفهم من ذلك انه يمكن تقدير مجسمات الأجسام باثقالها وهذا ما يطابق تماما للفكر المتخذ من أجله مجسم الجسم

الثاني — مجسم الجسم لا يتغير مهما اختلفت الحالات التي يوجد فيها الجسم

لأنه اذا تغير التثاقل فالثقل والعجلة يتغيران تبعا له بنسبة واحدة بموجب ما تقدم وعليه فالنسبة بينهما التي هي عبارة عن مجسم الجسم تكون ثابتة

وحدة المجسم — لأجل الحصول على وحدة المجسم نفرض ان م = ١ في المعادله

$$\text{م} = \frac{\text{ق}}{\text{و}} \quad \ldots\ (١)$$ فيكون

$$١ = \frac{\text{ق}}{\text{و}}$$ ومنها يحدث

$$\text{ق} = \text{و}$$

أعنى ان وحدة الجسم هى الجسم الذى ينشأ عنه ان كل قوة تؤثر على الجسم المذكور تكون مبينة بنفس العدد الدال على العجلة التى تحدثها تلك القوة لذلك الجسم

فاذا كانت القوة المؤثرة على الجسم هى ثقله فتؤول المعادلة

$$ق = و \quad الى$$

$$ث = ح$$

وعلى ذلك يكون الثقل المنسوب لوحدة الجسم فى محل ما مبينا بنفس العدد الدال على مقدار العجلة ح فى المحل المذكور

ففى القاهرة الثقل المنسوب لوحدة الجسم يزن ٩٫٧٩١٢ كيلوجرام وفى باريس يزن ٩٫٨٠٨٨ كيلوجرام وفى لندره يزن ٩٫٨٣ كيلوجرام

فاذا فرضنا فى معادلة (١) ان ق = ١ و = ١ يكون م = ١ وحينئذ يمكن ان يقال ان وحدة الجسم هى جسم الجسم الذى اذا اثرت عليه قوة قدرها كيلوجرام واحد حدثت له عجلة قدرها متر واحد

فى الارتباطات الواقعة بين القوى والجسمات والعجلات

نظرية ـ القوى الثابتة مناسبة لحاصل ضرب جسمات الأجسام فى العجلات التى تحدثها تلك القوى للأجسام المذكورة

أو بوجه الأختصار ان القوى الثابتة مناسبة لحاصل ضرب الجسمات فى العجلات

لأنه اذا فرض ان ق ، قَ هما القوتان المؤثرتان على جسمين جسمهما م ، مَ واحدثتا لهما عجلتين و ، وَ فانه بموجب ما تقدم يكون

$$\frac{ق}{و} = م \quad ، \quad \frac{قَ}{وَ} = مَ \quad أو$$

$$ق = م\,و \quad ، \quad قَ = مَ\,وَ \quad ومنها يحدث$$

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م\,و}{مَ\,وَ} \quad وهو المطلوب$$

وبواسطة هذه النسبة يمكن تقدير القوى بالحركات التى تحدثها للأجسام الواقعة عليها تلك القوى

كمية التحرك ـ كمية التحرك التى تكتسبها جسم ما فى لحظة معينة هى حاصل ضرب جسم الجسم المذكور فى سرعته فى اللحظة المفروضة

نظرية كمية التحرك ـ النسبة بين اى قوتين كالنسبة بين كمية التحرك الحادثتين منهما فى مدة الزمن عينها لأنه بناء على ما تقدم يكون

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م\,و}{مَ\,وَ}$$

وبضرب حدى نسبة الطرف الثانى فى الزمن ز يحدث

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م\,و\,ز}{مَ\,وَ\,ز}$$

ولكن

ولكن حيث أن و ن ، وَ ن عبارة عن سرعتى المتحركين الخارجين من السكون فى نهاية الزمن ن بناء على ما تقدم فيكون

$$\frac{\text{ق}}{\text{قَ}} = \frac{\text{م ع}}{\text{مَ عَ}}$$ وهو المطلوب

تنبيه - اذا جعل فى المعادلة السابقة ق = قَ يكون

$$1 = \frac{\text{م ع}}{\text{مَ عَ}}$$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{ع}}{\text{عَ}} = \frac{\text{مَ}}{\text{م}}$$

أعنى أن النسبة بين السرعتين الحادثتين من قوة واحدة لجسمين مختلفى الجسم كالنسبة العكسية بين جسمي الجسمين المذكورين.

وبناء على هذه القاعدة امكن ابطاء حركة المتحركين فى آلة اتود كى يمكن أن ترصد بالسهولة قوانين سقوط الأجسام

ولهذه القاعدة أيضا تطبيق فى رفس الاسلحة النارية أى فى الدفع الذى تحدثه تلك الاسلحة الى الخلف ولبيان ذلك يقال ان انتشار الغازات الناتجة من التهاب البارود يؤثر فى آن واحد على المقذوف وعلى السلاح النارى وحيث أن الجسمين مختلفان اختلافا كبيرا عن بعضهما فتكون سرعة الرجوع الى الخلف اى الرفس صغيرة جدا بالنسبة لسرعة خروج المقذوف وعلى هذا فيلزم الأعتناء عند اطلاق بندقية بضغطها جيدا بالكتف كى يزداد الجسم المتأثر بسرعة الرجوع

دفع القوة - يسمى دفع القوة حاصل ضرب تلك القوة فى زمن تأثيرها

نظرية - دفع القوة الثابتة المؤثرة على جسم خارج من السكون يكون دائما مساويا لكمية الحركة التى يكتسبها الجسم المذكور

لأنه بناء على ما تقدم يكون

$\text{ق} = \text{م و}$ وبضرب الطرفين فى ن يحدث

$\text{ق ن} = \text{م و ن}$ وحيث ان و ن = ع فيكون

$\text{ق ن} = \text{م ع}$ وهو المطلوب

تنبيه - اذا جعل ن = ٠ فى معادلة ق ن = م ع يكون

$0 = \text{م ع}$ ومنها يحدث

$$\text{ع} = 0$$

وينتج من ذلك أنه لاجل ان تحرك القوة جسما ما يلزم ان تأثيرها يمكث مدة من الزمن ولو صغيرة جدا اذ بدون ذلك لا توجد قوة آنية وعلى هذا اذا اطلقت رصاصة على لوح من الزجاج بالقرب منه فانها تنفذ منه بدون ان تشعر بخلاف ما اذا اطلقت الرصاصة المذكورة على اللوح المذكور من بعد

كبير فأنها تكسره وذلك لأنه في الحالة الأولى مدة تلامس الرصاصة مع عناصر اللوح الزجاج صغيرة جدا وفي الثانية كبيرة

تطبيقات

لأجل تتميم ما ذكرناه على القصور الذاتي وتطبيقا على القواعد السابقة سنذكر بعض تعاديف بسيطة تختص بالقصور الذاتي المعتبر قوة وبالقوى المركزية الجاذبة والطاردة التي تطبيقاتها عديدة ومهمة فنقول

قوة القصور الذاتي

من المعلوم ان القوة التي تحدث حركة نقطة مادية تبين بالارتباط الآتي وهو

$$ ق = م و $$

وهذا الارتباط الذي يمكن وضعه على الصورة الآتية وهي

$$ ق - م و = ٠ $$

يسمح بأن نعتبر م و مقدارا مطلقا لقوة مضادة للقوة ق وهذه القوة الوهمية التي تتزن في كل لحظة مع القوة المحدثة لحركة النقطة المادية تسمى قوة القصور الذاتي لهذه النقطة

ولأجل فهم قوة القصور الذاتي هذه نعتبر في آن واحد مع حركة النقطة المادية المذكورة الجملة المادية الناتج عنها القوة أو التأثير الواقع على تلك النقطة

ولنتصور مثلا جسما مقبوضا عليه باليد وصار تحريك اليد المذكوره بدون ترك ذلك الجسم فيرى ان هذا الجسم يؤثر على اليد المذكوره الجاذبة له بحيث انه متى قلت حركة اليد فالجسم بناء على قاعدة القصور الذاتي يميل لاستمرار حركته فيدفع اليد الى الأمام واذا ازدادت حركة اليد المذكورة فأن الجسم بناء على قاعدة القصور الذاتي كذلك يميل لان يحفظ حركته ويحدث تعطيل حركة اليد فرد الفعل هذا الناشئ من الجسم على اليد في كل لحظة أو الذي يقاوم مجموعة حيثما اتفقت في أحوال مثل هذه يسمى قوة رد فعل النقطة المادية المذكورة

ولنلاحظ ان قوة رد الفعل هذه هي نفس القوة التي سميناها قوة القصور الذاتي حيث ان قوة رد الفعل المذكورة مساوية ومضادة للفعل أي للقوة المحدثة للحركة التي مقدارها المطلق هو

$$ ق = م و $$

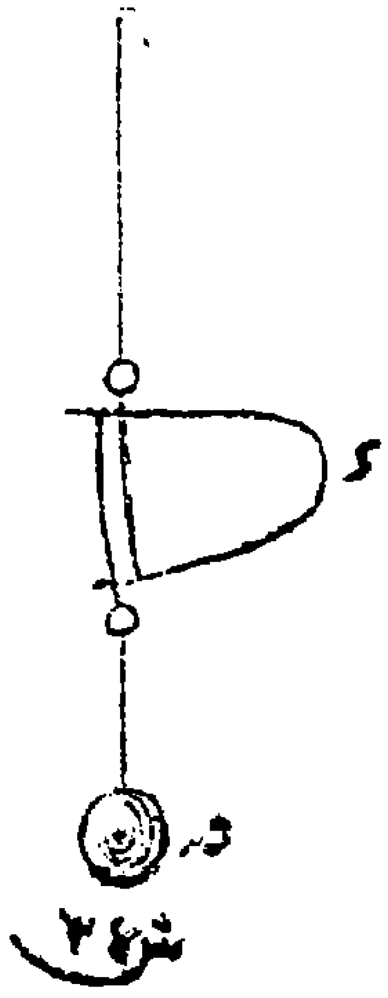
وحينئذ يمكن ان يقال أن قوة القصور الذاتي لنقطة مادية عبارة عن رد الفعل الواقع من هذه النقطة على الجملة المادية التي تجبرها على اتباع حركة معينة

وهذه القوة التي يظهر وجودها بالنسبة للحالة التي توجد فيها ارتباطات مادية يمكن اعتبار وجودها كذلك بالنسبة للنقط التي يؤثر بعضها على بعض ولو لم يشاهد ادنى واسطة بينها

وحيث ان قوة القصور الذاتي لنقطة مادية لا تؤثر على نفس النقطة المذكوره بل على الجملة المادية المرتبطة

المرتبطة بهذه النقطة التي تجبرها الأن تتبع حركة معينة فينتج من ذلك أنه متى اعتبرت النقطة المادية والقوة المؤثرة عليها فقط بدون نسبة القوة المذكورة الى الجملة الناشئة عنها تلك القوة فان قوة القصور الذاتي للنقطة المادية المذكورة تكون وهمية محضا كما سبق ذكر ذلك

ويمكن مشاهدة قوة القصور الذاتي وقياسها بالديناموميتر وهاك تجربة مهمة لهذه الغاية نذكرها فنقول



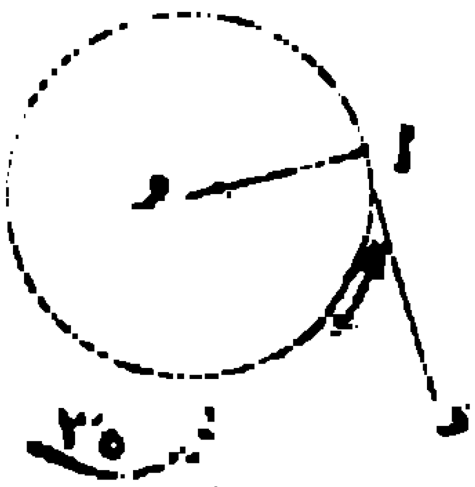
اذا علق جسم ه في ديناموميتر ى الممسوك باليد شكل ٣٤ فيرى انه عند ما يكون الجسم ساكنا يبين الديناموميتر ثقله ولكن بمجرد دفع الآلة ينثني الزنبلك كثيرا كلما كان الصعود بسرعة وحينئذ يشاهد وجود قوة مضافة الى الجسم ناشئة من نفس الجسم المذكور الا أنها واقعة على الفرع الأعلى للديناموميتر وهي مساوية بالضبط للقوة الجديدة التي تحدثها اليد عند دفع المجموعة (بقطع النظر عن ثقل الديناموميتر) ولكن اذا صارت الحركة منتظمة يرى أن شعبة الديناموميتر ترجع الى الوضع التي كانت فيه عندما كان الجسم ساكنا ولا يوجد حينئذ قوة قصور ذاتي في الحركة المنتظمة

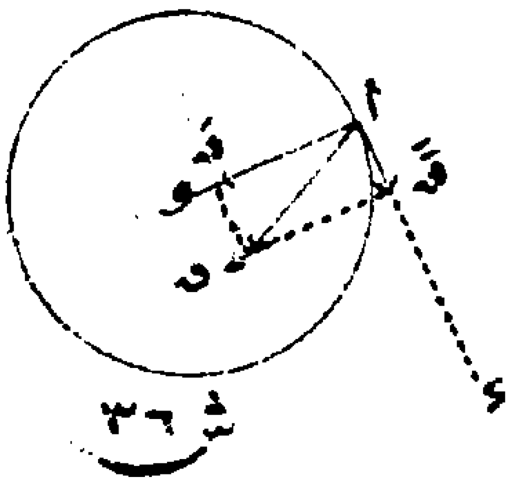
واذا كانت حركة الصعود منتظمة العجلة فزيادة الانثناء تبقى ثابتة لانه حيث كانت القوة المحركة ثابتة فتكون قوة القصور الذاتي المساوية والمضادة لها ثابتة كذلك

ويفهم من التجربة السابقة ان التثاقل يؤثر على الجسم في حالة الحركة كما يؤثر عليه في حالة السكون فاذا حركت عربة مثلا موضوعة على طريق افقي أملس حركة عجلية بسحبها بواسطة حبل فانه يمكن التحقق اما برصد الحبل واما بالديناموميتر من ان شدة الحبل المذكور في هذه الحالة أكثر منها في الحركة المنتظمة وزيادة الشدة هذه يقدر بها قوة القصور الذاتي للعربة وتلك القوة ناشئة من العربة المذكورة ولكنها مؤثرة بواسطة الحبل السابق ذكره على المحرك الذي يجذب تلك العربة

في القوة الطاردة المركزية

الحركة الدائرية — القوة الجاذبة المركزية — اذا فرضت نقطة مادية ا متحركة بانتظام على محيط دائرة مركزه و شكل ٣٥ يقال انه اذا كانت هذه النقطة ليست متأثرة الا بالسرعة الابتدائية فقط فأنها تتحرك على خط مستقيم في اتجاه الجزء المستقيم ا اعني في اتجاه المماس اء بموجب ما تقدم ولكن حيث أن المتحرك يتحرك على محيط الدائرة المذكورة فحينئذ يكون متأثرا بقوة وحيث كانت الحركة منتظمة فيلزم ان تكون هذه القوة متجهة نحو المركز لأنه اذا فرض ان تلك القوة متجهة في اتجاه حيثما اتفق مثل اه شكل ٣٦ فيمكن تحليلها الى قوتين احداهما ق عمودية على اتجاه المتحرك ولا يمكن ان تغير سرعته والأخرى ق على اتجاه المماس في نقطة ا وهذه





القوة تغير سرعة المتحرك وعلى هذا فلا تكون الحركة منتظمة وحينئذ فالجسم الذى يسير بانتظام على محيط دائرة يكون متأثرا بقوة متجهة دائما نحو المركز

وهذه القوة تسمى بالقوة الجاذبة المركزية نسبة لاتجاهها

القوة الطاردة المركزية — كما ان الفعل له رد فعل مساو ومضاد له كذلك القوة الجاذبة المركزية التى تجعل المتحرك يتحرك على محيط الدائرة بانتظام لها رد فعل فى جهة مضادة ومؤثر على الجملة الناشئ عنها القوة الجاذبة المركزية وليس هو الاحالة خصوصية من قوة القصور الذاتى

وعلى هذا فتكون القوة الطاردة المركزية عبارة عن رد الفعل الحادث من الجسم على الجملة المادية التى تجبره لأن يسير على محيط دائرة بحركة منتظمة

وحيث ان القوة الطاردة المركزية ناشئة عن القوة الجاذبة المركزية فتكون هاتان القوتان متلازمتين أعنى انه بمجرد انقطاع تأثير القوة الجاذبة المركزية ينقطع فى الحال تأثير القوة الطاردة المركزية ولكن يجب ملاحظة أن هاتين القوتين لايقعان قط مباشرة على نفس النقطة المادية

وربما يتوهم انه يفهم من لفظة طاردة مركزية أن القوة الطاردة المركزية تبعد المتحرك عن المركز فهذا خطأ محض حيث ان القوة المذكورة ليست واقعة على المتحرك مباشرة

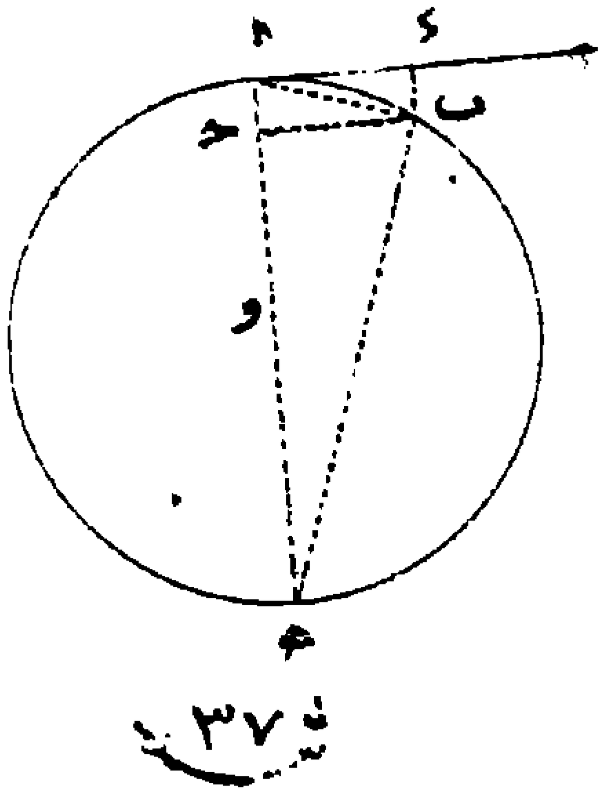
ففى المقلاع مثلا الجذب الواقع من اليد على الحجر لأجل حفظه على محيط دائرة هو القوة الجاذبة المركزية وهى واقعة على الحجر المذكور بواسطة الحبل ولكن فى هذه الحالة تكون اليد مجذوبة فى آن واحد بالقوة الطاردة المركزية الناشئة عن ذلك الحجر وواقعة على اليد بواسطة الحبل وهاتان القوتان تحدثان أيضا للحبل شدا ويمكنهما قطعه فحينئذ اذا انقطع الحبل بتأثير الشد المذكور أو صار قطعه فأن تأثير القوة الجاذبة المركزية ينعدم وتنعدم فى الحال القوة الطاردة المركزية ويبقى الحجر متأثرا بسرعته المكتسبة وينقذف حينئذ على اتجاه المماس لمحيط الدائرة الدائر عليه

تنبيه — اذا سار المتحرك على منحنى خلاف قوس الدائرة فالنتائج التى تحصل تكون مشابهة لما تقدم أعنى ان القوتين الجاذبة المركزية والطاردة المركزية تكونان دائما عموديتين على المنحنى المقطوع

واذا كانت القوة التى تؤثر على المتحرك ليست متجهة فى اتجاه العمودى للمنحنى فتحلل كما تقدم الى قوتين احداهما عمودية على المنحنى وهى القوة الجاذبة المركزية والأخرى مماسة وهى التى تغير سرعة المتحرك وتكون حينئذ حركة متغيرة وهذا حاصل فى الكواكب حيث انها تسير على قطاعات ناقصية بتأثير قوة تمر دائما بأحدى البورتين

تقدير القوة الطاردة المركزية — لأجل الحصول على مقدار القوة الطاردة المركزية نبحث عن مقدار القوة الجاذبة المركزية المساوية لها فنقول

اذا فرض ان المتحرك ا سائر بانتظام على محيط دائرة مركزه و شكل ٣٧ بسرعة قدرها ع وانه قطع القوس



القوس اب في مدة زمنية صغيرة جدا ز فانه يكون

$$\text{قوس اب} = ع ز$$

ولكن حيث ان المسافة اب يمكن اعتبارها حصلة مسافتين مركبتين متجهة احداهما اء على اتجاه المماس والاخرى اح على اتجاه نصف القطر فالمسافة اح تكون ناشئة عن القوة المركزية الجاذبة ولاجل معرفة مقدار المسافة المذكورة يقال انه من المثلث اب هـ القائم الزاوية يحدث

$$اح = \frac{\overline{اب}^2}{2\,نق}$$

وفي هذه المعادلة نق رمز لنصف قطر محيط الدائرة المفروضة وحيث ان القوس اب صغير جدا فيمكن اعتبار طول القوس المذكور مساويا لوتره وحينئذ نضع في المعادلة المذكوره ع ز عوضا عن اب فنؤول الى

$$اح = \frac{ع^2 ز^2}{2\,نق}$$

ويفهم من ذلك ان المسافة اح قطعت بحركة منتظمة العجلة مقدار عجلتها $\frac{ع^2}{نق}$ فاذا رمزنا لهذه العجله بحرف و يكون

$$و = \frac{ع^2}{نق}$$

واذا رمزنا بحرف ق لشدة القوة الجاذبة المركزية وبحرف م للجسم المتحرك يكون

$$ق = م\,و \quad \text{وحينئذ يكون}$$

$$ق = \frac{م ع^2}{نق}$$

أعني ان شدة القوة الطاردة المركزية مناسبة طردا للجسم المتحرك ولمربع السرعة وعكسا لنصف القطر

تنبيهات

الأول ـ من القانون $ق = \frac{م ع^2}{نق}$ يتضح ان القوة الطاردة المركزية تنعدم اذا كان ع = ٠ أو نق = ∞ أعني اذا كان الجسم ساكنا أو كان متحركا على خط مستقيم

الثاني ـ حيث انه يبين عادة مقدار القوة الطاردة المركزية بدلالة السرعة الزاوية للمتحرك فاذا رمزنا للسرعة الزاوية المذكورة بحرف ح يكون

$$ح = \frac{ع}{نق} \quad \text{ومنه يحدث}$$

$$ع = ح\,نق$$

فاذا وضع في القانون السابق عوضا عن ع مقدارها يحدث

$$ق = م\,ح^2\,نق$$

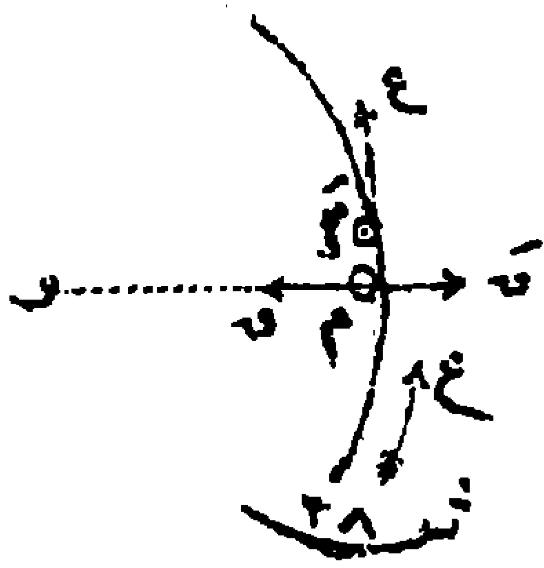
الثالث ـ حيث انه يمكن أيضا بيان مقدار القوة الطاردة المركزية بدلالة عدد الدورات التي يصنعها

المتحرك في الثانية الواحدة فاذا رمزنا له بحرف ن يكون

ع = ٢ ط نوه ن   وعليه يكون

ق = ٤ ط م نوه ن٢

تطبيقات ـ ينتفع بالقوة الطاردة المركزية في مراوح آلات الغربلة وفي الطلمبات الدورانية وخلافها ففي الآلات التي تسمى بالمجففات ينتفع أيضا بالقوة الطاردة المركزية لتجفيف الأجسام المبتلة وذلك بأن توضع تلك الأجسام في اسطوانات جدرانها مثقوبة ثقوبا كثيرة جدا ثم تحرك تلك الاسطوانات حركة دورانية سريعة جدا بحيث تصل تلك الحركة الى ١٥٠٠ دوره في الدقيقة الواحدة وحينئذ اذا فرض عنصر ما في مثل م شكل ٣٨ موجود على السطح الداخل للاسطوانة فانه



بسبب ان السطح المذكور يجبر ذلك العنصر على ان يتحرك حركة مستديرة فحدد التأثير او القوة الجاذبة ق الواقعة على العنصر السالف ذكره وهذا العنصر يؤثر على ذلك السطح برد فعل مساو الى ق هو القوة الطاردة المركزية

فمتى وجد أحد العناصر امام أحد الثقوب في الوضع م فان كلتا القوتين تنعدم والعنصر المذكور المشترك في السرعة ع مع الاسطوانة اثناء الدوران يتقذف الى الخارج على اتجاه المماس

ومثل ذلك يحصل بالنسبة للعناصر المائية الموجودة داخل الجسم المبتل حيث ان الثقوب فيه هي المسام وحينئذ فالماء يأتي منه بالتدريج الى الجدران ومنه ينقذف الى الخارج

وقد تستعمل في فابريقات السكر الات مشابهة للمجففات تسمى توربينات لاجل تخليص السكر الخام من العسل الاسود الملوث له

والسبب في ميل العربات السائرة بسرعة على منحنيات انصاف اقطارها صغيرة الى الانقلاب هو تأثير مشابه لما تقدم ولذا فانه في السكك الحديد لا يسمح على وجه العموم الا بالمنحنيات التي انصاف اقطارها تتجاوز ٣٠٠ متر وزيادة على ذلك فانه يصير تعلية القضيب الخارج عن الداخل بمقدار يكون كبيرا كلما كان نصف القطر صغيرا والسرعة كبيرة

ولا يخفى ان السبب في حفظ الكواكب على مداراتها هو القوة الجاذبة المركزية وتعتبر انها ناشئة من جذب الشمس للكوكب وان القوة الطاردة المركزية المساوية لها ناشئة من الكوكب لكونها واقعة على الشمس وتعتبر الجذب الواقع من الكوكب على الشمس

وقد ينسب الى القوة الطاردة المركزية النقص الحاصل لثقل الأجسام على سطح الأرض بمجرد قربها من خط الاستوا وينسب اليها أيضا الانتفاخ الحاصل للكرة الارضية في خط الاستواء

ويجب التمييز بكل اعتناء بين التأثيرات المنسوبة للقوة الطاردة المركزية وبين الحركات المنسوبة للقصور الذاتي

الذاق ففى المقلاع السابق ذكره مثاله اشتداد الحبل ناشئ عن القوتين الطاردة المركزية والجاذبة المركزية لكن متى خرج الحجر فأن القوتين المذكورتين تنعدمان فى آن واحد والحجر المذكور ينقذف فى الفراغ على اتجاه المماس بناء على سرعته المكتسبة اثناء الدوران

ومثل ذلك فأن الوحل الملتصق فى عجل العربات ينقذف على اتجاه المماس ويسقط على الأرض بعد أن يرسم قطعا مكافئا بناء على ما تقدم

شغل القوى

فى تعريف وتقدير الشغل

التأثير المفيد الناشئ من جهد عامل ما أعنى شغله حسب المتعارف لا يقدر فقط بالجهد بل أيضا بالطريق الذى حصل على طوله الجهد المذكور

فحينئذ الرجل الذى يرفع ثقلا قدره خمسون كيلوجراما لارتفاع متر واحد يحدث شغلا ضعف الشغل الناتج من رفع خمسة وعشرين كيلوجراما الى الارتفاع المذكور وبالمثل الصانع الذى يرفع خمسين كيلوجراما الى ارتفاع مترين يحدث شغلا ضعف شغل من يرفع خمسين كيلوجراما الى ارتفاع متر واحد

ولكن اذا تغير كل من الثقل ق والارتفاع هـ بنسبة عكسية بحيث ان حاصل ضربهما يبقى ثابتا فالشغال يصرف دائما جهدا واحدا وحينئذ فالحاصل ق هـ يمكن ان يستعمل لتقدير شغله وبهذه الطريقة قد توصل الى التعريف الرياضى لشغل القوى

شغل قوة ثابتة

شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على اتجاه القوة - تعريف - شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على اتجاه القوة هو حاصل ضرب شدة تلك القوة فى طول المسافة المقطوعة

وقد يرمز عادة لشغل القوة ق بالرمز ش ق وحينئذ اذا رمز بحرف هـ للمسافة ا ا' شكل ٣٩ المقطوعة بنقطة تأثير القوة ق فبناء على التعريف المتقدم يكون

ش ٣٩

$$ش ق = ق \times هـ$$

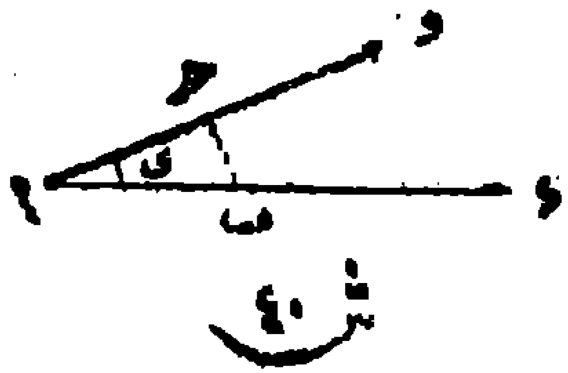
وحدتا الشغل - الكيلوجرام متر - الحصان البخارى - قد يقارن بشغل التثاقل شغل جميع القوى الأخر والوحدة المتخذة هى الكيلوجرام متر وهو عبارة عن الشغل اللازم لرفع ثقل قدره كيلوجرام واحد الى ارتفاع متر واحد وهو لا يتعلق بالزمن حيث أن الشغل الناتج لا يتغير مهما كان الزمن المستعمل لذلك ولكن فى الآلات نظرا لكونها تمتاز عن بعضها بالشغل الذى تحدثه فى زمن معين فقد اتخذ لها وحدة أخرى مرتبطة بالزمن هى الحصان البخارى وهو عبارة عن الشغل الذى قدره ٧٥ كيلوجرام متر الحاصل فى ثانية واحدة

وهذا الشغل أكثر من شغل الحصان المعتاد حيث أنه ظهر من التجربة ان بتشغيل الحصان المعتاد ثمانى

ساعات فى اليوم الواحد يحدث شغلا قدره ٤١ كيلوجرام متر فى الثانية أو ١١٨٠٨٠٠ كيلوجرام متر فى اليوم ولكن شغل ٧٥ كيلوجرام متر فى الثانية الواحدة بيشأ عنه مدة ٢٤ ساعة شغل قدره ٦٤٨٠٠٠٠ كيلوجرام متر حينئذ الآلة التى قوتها حصان بخارى واحد يمكنها ان تؤدى شغلا اكثر من شغل خمسة خيول معتادة تتناوب مع بعضها فى العمل بحيث ان كلا منها يشتغل ثمان ساعات كل اربعة وعشرين ساعة

الشغل المحرك ـ الشغل المقاوم ـ الشغل المحرك هو الشغل الناتج من قوة مؤثرة فى جهة الحركة وهذه القوة يقال لها قوة محركة أو قوة فقط والشغل المقاوم هو الشغل الناتج من قوة مؤثرة فى جهة مضادة لحركة المتحرك وهذه القوة تسمى بالمقاومة مثلا اذا رفع جسم فالشغل الناتج هو شغل محرك والشغل الذى يحدثه الثاقل على الجسم المذكور هو شغل مقاوم

شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على خط مستقيم فى اتجاه مغاير لاتجاه القوة المذكورة ـ تعريف ـ يسمى شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على خط مستقيم فى اتجاه مغاير لاتجاه القوة المذكورة حاصل ضرب تلك القوة فى المسافة المقطوعة فى جيب تمام الزاوية الواقعة بين اتجاهى القوة والمسافة المقطوعة



فاذا فرض ان ا ه قوة ثابتة مقدارا واتجاها مؤثرة فى نقطة ا التى تتحرك على اتجاه ا و الصانع مع اتجاه القوة المذكورة ا ه زاوية قدرها ى شكل ٤٠ وفرض ان ا ب = ه هى المسافة المقطوعة فبناء على التعريف المتقدم يكون

ش ه = ه ه حا ى ......(١)

تنبيهان

الأول ـ هذا القانون يمكن كتابته والنطق به بطريقتين مختلفتين وهما

الأولى ش ه = ه × ه حا ى .....(٢)

أعنى ان الشغل يساوى حاصل ضرب المسافة فى مسقط المسافة على اتجاه القوة

الثانية ش ه = ه × ه حا ى .....(٣)

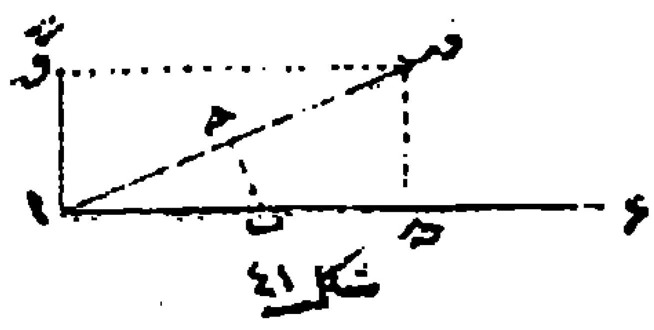
أعنى أن الشغل يساوى حاصل ضرب المسافة فى مسقط القوة على اتجاه المسافة

الثانى ـ التعريف الثانى للشغل لم يكن الا تعميما للتعريف الأول ولبيان ذلك يقال أولا ان التعريف الثانى يحتوى على الأول لأنه اذا كانت ى = ٠ يكون حا ى = ١ ويؤل قانون (١) الى ش ه = ه ه

ثانيا يمكن حصر التعريفين السابقين فى منطوق واحد لأنه يكفى ان يعتبر فى قانون (٢) أن مسقط المسافة على اتجاه القوة أعنى ه حا ى عبارة عن المسافة مقدرة على اتجاه القوة وحينئذ فيكون شغل قوة ثابتة بالنسبة لانتقال مستقيم حيثما اتفق يساوى حاصل ضرب القوة فى المسافة مقدرة على اتجاه القوة

ثالثا

ثالثاً يمكن استنتاج التعريف الثانى من الأول باعتبارات مستخرجة من فكرة تأثير القوى وذلك لأن القوة المائلة ق يمكن تحليلها الى قوتين احداهما ق شكل ٤١ عمودية على المسافة المقطوعة اب وتلك القوة لا تحدث ادنى تأثير على انتقال نقطة ا وحينئذ فلا ينشأ عنها شغل والأخرى ق متجهة فى اتجاه اب وهى التى ينسب لها الشغل المفروض فقط وحينئذ يكون



ش ق = ش ق

وبناء على التعريف الأول يكون

ش ق = ق × اب = ق جتا ى × هـ

وهو عين قانون (٣) السابق

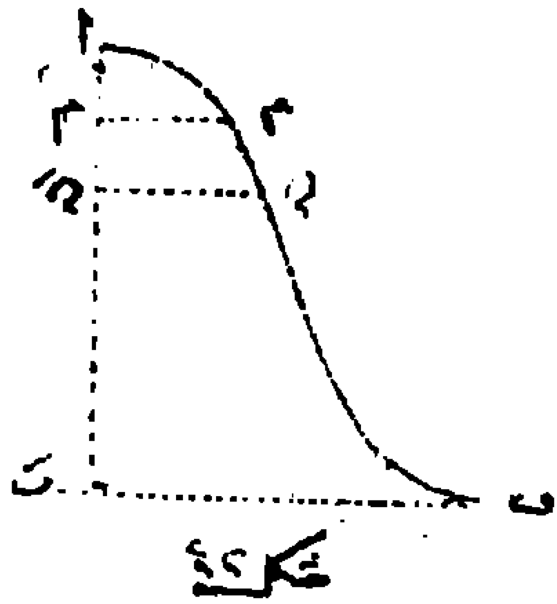
مناقشة القانون ش ق = ق هـ جتا ى — اذا كان جتا ى موجبا فالشغل موجب أيضا ويكون هو الشغل المحرك واذا كان جتا ى سالبا فالشغل سالب أيضا ويكون هو الشغل المقاوم وحيث أن حاصل الضرب ق هـ جتا ى ينعدم اذا كان احد مضاريبه مساويا للصفر فلا يتأتى ذلك حينئذ الا فى ثلاث حالات

الأولى — متى كانت ق = ٠ أعنى انه اذا لم توجد قوة فلا يوجد شغل كالجسم المتحرك بسرعة المكتسبة مثل كرة تتدحرج على مستو أفقى بسرعة ثابتة

الثانية — متى كانت هـ = ٠ يعنى ان الجسم لم ينتقل من محله ككتلة من الماء محصورة فى حوض منفذه مغلق

الثالثة — متى كان جتا ى = ٠ أعنى متى كان ى = ٩٠° أى أن اتجاه القوة عمودى على اتجاه المسافة المقطوعة كالهواء الذى يؤثر بالتعامد على الطريق الذى تتبعه عربة من عربات السكة الحديد

شغل التثاقل على نقطة مادية — من بعد ملاحظة أن التثاقل ثابت متى كانت المسافة التى يقطعها الجسم الساقط صغيرة بالنسبة لنصف قطر الكرة الأرضية اذا فرضت نقطة مادية ثقيلة أعنى جسما آل الى مركز ثقله فأنه مهما كانت المسافة المقطوعة يكون شغل التثاقل مساويا لحاصل ضرب ثقل الجسم المذكور فى الانتقال الرأسى لمركز ثقله



لأنه اذا فرض جزء صغير جدا م ن من المنحنى اب شكل ٤٢ بحيث يمكن اعتباره خطا مستقيما فان مقدار الشغل الحاصل عندما يقطع مركز ثقل الجسم المذكور الجزء الصغير م ن السابق ذكره بناء على ما تقدم يكون

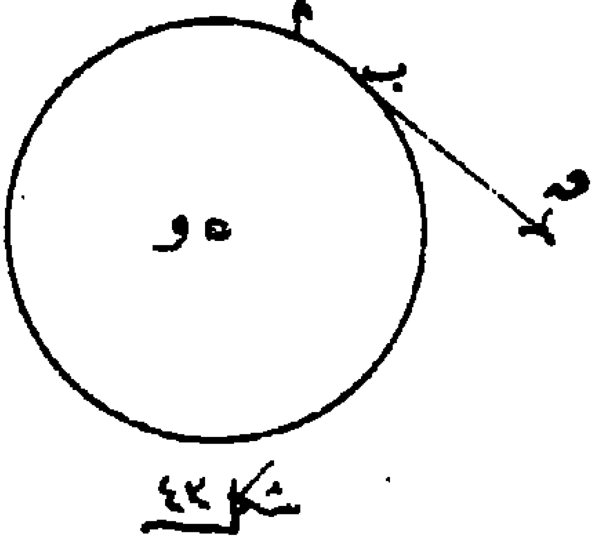
ث × مَ نَ

الذى فيه ث رمز لثقل الجسم ، مَ نَ مسقط المسافة م ن على اتجاه القوة التى هى رأسية

وبمثل ذلك يكون بالنسبة لجميع أجزاء المسافة المقطوعة وحينئذ بجمع الأشغال الجزئية المحصلة الى بعضها يحدث

ش ق = ق × اَ ت

شغل قوة ثابتة الشدة مؤثرة بالتماس على محيط دائرة محلة - اذا فرض أن قوس ا ب شكل ٤٣ صغير جدا بحيث يتحد مع المماس ا ق فان شغل القوة ق عند ما يقطع المتحرك المسافة الجزئية المذكورة يكون ق × ا ب حيث أن المسافة مقطوعة على اتجاه القوة وبمثل ذلك يحدث بالنسبة لكل من الاشغال الجزئية. وحينئذ يكون الشغل الكلي لدورة كاملة مساويا لحاصل ضرب القوة ق في مجموع الأجزاء المستقيمة أي في طول محيط الدائرة و المقطوع أعني أن



شكل ٤٣

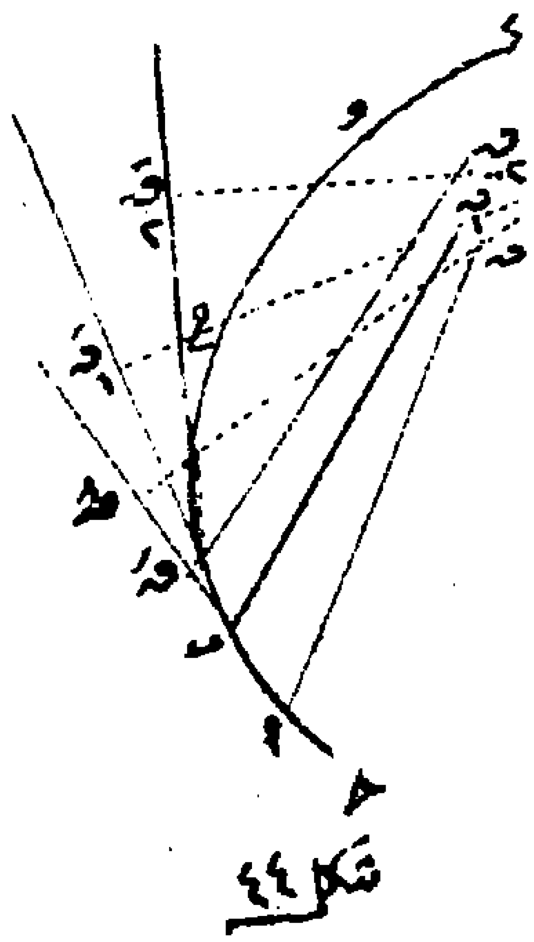
ش ق = ق × ٢ ط نق

تنبيه - اذا كان المتحرك يقطع منحنيا حيثما اتفق بحيث أن القوة المؤثرة عليه تبقى مماسة له دائما ورمزنا لطول القوس المقطوع بالرمز ل يكون

ش ق = ق × ل

شغل قوة متغيرة

شغل جزئي - شغل كلي - اذا فرضت قوة متغيرة ق مؤثرة على نقطة مادية تتحرك على خط سير حيثما اتفق ء ى شكل ٤٤ وفرض ان ا والمسافة المقطوعة فأنه يمكن اعتبار القوة المتغيرة ق ثابتة مقدارا واتجاها اثناء قطع نقطة تأثيرها الجزء الصغير ا ب المعتبر خطا مستقيما طوله هـ مساو لطول وتره وحينئذ اذا رمز بالرمز قَ لمسقط ا قَ للقوة ق على اتجاه الوتر ا ب فأن مقدار الشغل الجزئي لهذه القوة بناء على ما تقدم يكون



شكل ٤٤

قَ × هـ

وبالمثل بالنسبة للأجزاء المتتالية تكون الأشغال الجزئية مبينة بالمقادير المشابهة للمقدار السابق ومجموعها يكون

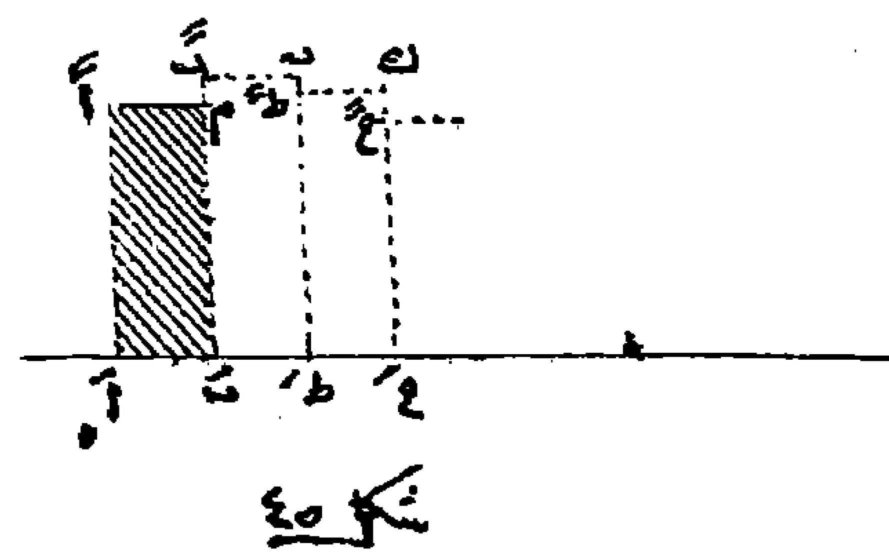
قَ هـ + قً هَ + قٍ هً + ...

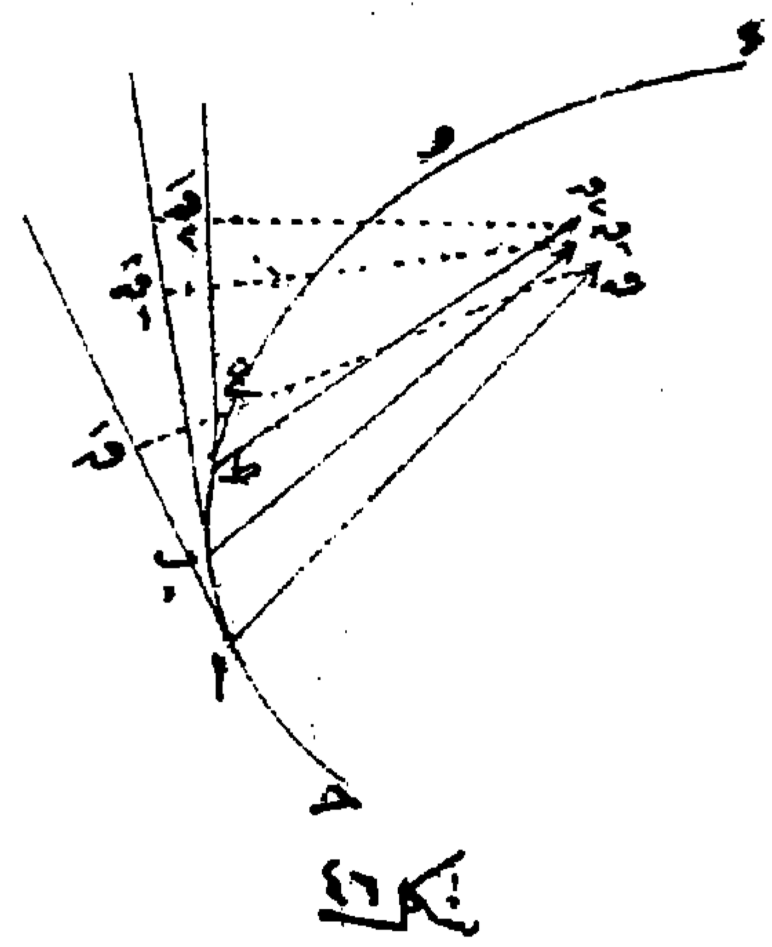
وحينئذ فالشغل الكلي للقوة يكون هو النهاية التي يميل اليها مجموع الاشغال الجزئية المذكورة حينما تميل المسافات الجزئية هـ ، هَ ، هً ، .... نحو الصفر

فاذا علمت الارتباطات الدالة على تغيرات القوة وشكل خط السير يمكن تعيين مقدار الشغل الكلي بكمية محدودة لكن حيث ان معلومية تلك الارتباطات ليست من حدود هذا العلم الابتدائي فيكتفى بالطريقة الرسمية الآتيـــة

الطريقة

الطريقة الرسمية لتقدير شغل قوة متغيرة ــ هذه الطريقة هي ان تقسم المسافة المقطوعة الى اجزاء صغيرة جدا بحيث يمكن اعتبار كل منها مستقيما في الظاهر وأن القوة ثابتة عندما يقطع المتحرك كل جزء من تلك الاجزاء المذكورة ثم تؤخذ بصفة احداثيات افقية الأطوال أَ بَ ، بَ طَ ، طَ عَ ،..... شكل ٤٥ المساوية الى المسافات الجزئية المستقيمة ا ب ، ب ط ، ط ع ،..... شكل ٤٦ المتكون منها خط السير المفروض وتؤخذ بصفة احداثيات رأسية على الأعمدة المقامة من نقط أَ ، بَ ، طَ ، عَ ،..... الأطوال أ أً ، بَ بً ، طَ طً ،..... المساوية الى المساقط ا مَ ، ب هَ ، ط هِ ،..... للقوة المفروضة على الاتجاهات المختلفة لتلك المسافات الجزئية فالشغل الجزئي ق هـ المنسوب للانتقال ا ب يكون حينئذ مبينا بالمستطيل أ أً م بَ وبمثل ذلك يكون بالنسبة لباقي الاشغال الجزئية المنسوبة لباقي الانتقالات الأخر وعليه فيكون مجموع الاشغال الجزئية عبارة عن مجموع المستطيلات

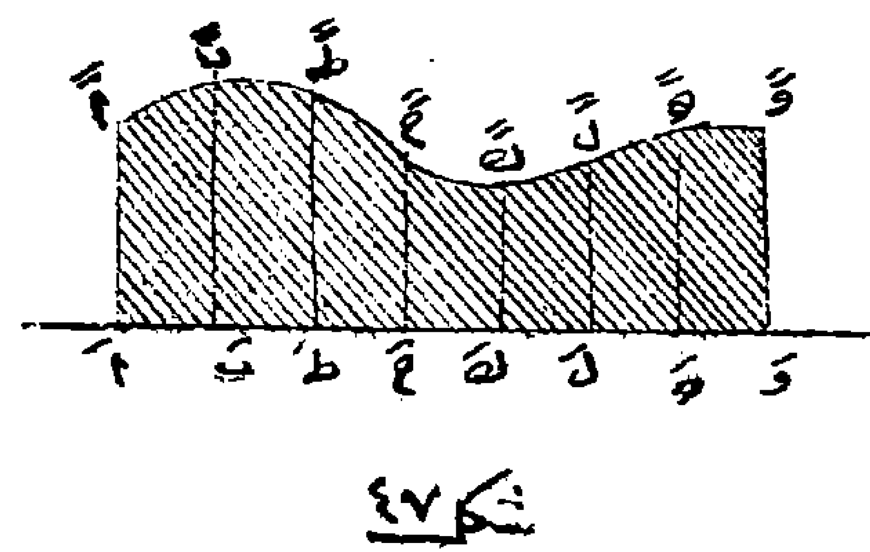

شكل ٤٥


شكل ٤٦

أ أً م بَ + بَ بً ن طَ + طَ طً ل عَ + ...

الذي يكتفي بتعيين مقداره اذا اريد الحصول على تقريب غير دقيق ولا يخفى ان تقدير شغل القوة المتغيرة هذا يكون مقربا تقريبا كافيا كلما كانت الأجزاء ا ب ، ب ط ، ط ع ،..... صغيرة جدا فحينئذ اذا أخذ عدد تلك الأجزاء في الازدياد بقدر ما يراد فالنقط أً ، بً ، طً ، عً ،..... تقرب من بعضها بقدر ما يراد وينشأ عن مجموعها منحنٍ بحيث يكون السطح المحصور بينه وبين الرأسيين المتطرفين ومحور السينات دالا على المقدار الحقيقي لشغل القوة المتغيرة بالضبط

ولأجل رسم المنحني المذكور بضبط كاف يفرد بالدقة على قدر الامكان الجزء ا و من خط سير المتحرك على محور السينات من أَ الى وَ شكل ٤٧ وتوضع عليه النقط المتوسطة بَ ، طَ ،..... ويقام من جميع النقط أَ ، بَ ، طَ ،..... الاحداثيات الرأسية للمنحني المساوية للمساقط ا هَ ، ب هَ ، ط هِ ،..... للقوة المتغيرة على المماسات الممتدة من نقط ا ، ب ، ط ،..... لخط السير المفروض شكل ٤٦ وبهذه الطريقة تتعين النقط أً ، بً ، طً ،..... للمنحني المطلوب ويكفي لرسمه بعد ذلك أن يوصل بين تلك النقط بخط متصل أً بً طً .....


شكل ٤٧

وحينئذ فيتعين بمساحة شبه المنحرف المنحني أَ أً وً وَ شكل ٤٧ مقدار شغل القوة المتغيرة المفروضة ويمكن الحصول على مقدار مساحة الشكل الذي من هذا القبيل اما بقانون بونسلي أو بقانون سمبسون أو بقانون الاشباه المنحرفة المستقيمة الأضلاع

ويتوصل احيانا لتعيين مقدار مساحة شكل أَ أً وً وَ المذكور بقطعه من الورق ووزنه ثم وزن سطح

معلوم من الورق عينه وتعيين النسبة بين الوزنين المذكورين التي بواسطتها يمكن تعيين مساحة ذلك الشكل وهذه الطريقة سريعة جدا وانما تقتضي أن يكون الورق متجانساً جيداً
والتقريب الناتج من هذه الطريقة الرسمية يكون عظيما كلما كان انفراد خط السير معمولا جيدا والنقط المتوسطة عديدة والمنحنى مرسوما بكل اعتناء
وبواسطة الآلة المسماة دليل المعلم وات يمكن رسم المنحنيات المشابهة للمنحنى الذي تكلمنا عليه مباشرة من نفسها وتلك المنحنيات تستعمل لتقدير شغل البخار في اسطوانات البخار وتسمى بالخطوط البيانية
الجهد المتوسط - الجهد المتوسط لقوة متغيرة هو شدة القوة الثابتة التي تحدث على الطريق عينه نفس الشغل الذي احدثته القوة المتغيرة المفروضة
فاذا رمزنا بالرمز ش ق لشغل القوة المتغيرة وبالرمز هـ للمسافة المقطوعة وبالرمز ق َ للقوة المتوسطة فبناء على التعريف المتقدم يكون

$$\text{قَ هـ} = \text{ش ق} \qquad \text{ومنه يحدث}$$

$$\text{قَ} = \frac{\text{ش ق}}{\text{هـ}}$$

شغل محصلة جملة قوى - نظرية - الشغل الجزئي لمحصلة جملة قوى يساوي المجموع الجبري للأشغال الجزئية للمركبات
لانه اذا كانت القوى هي ق، ق١، ق٢، .... ومحصلتها هي ح واسقطنا هذه القوى ومحصلتها على اتجاه الانتقال الجزئي أي على اتجاه جزء المسافة المقطوع ولاحظنا بناء على كثير اضلاع القوى ان مسقط المحصلة على محور ما يساوي المجموع الجبري لمساقط المركبات ورمزنا بالرموز حَ، قَ، قَ١، قَ٢، ..... لمساقط القوى ح، ق، ق١، ق٢، .... على اتجاه جزء المسافة المذكور يكون

$$\text{حَ} = \text{قَ} + \text{قَ}_1 + \text{قَ}_2 + \ldots\ldots$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في جزء المسافة هـ يحدث

$$\text{حَ هـ} = \text{قَ هـ} + \text{قَ}_1\text{هـ} + \text{قَ}_2\text{هـ} + \ldots \qquad \text{أعني ان}$$

$$\text{ش ح} = \text{ش ق} + \text{ش ق}_1 + \text{ش ق}_2 + \ldots \qquad \text{وهو المطلوب}$$

نتيجة - الشغل الكلي للمحصلة يساوي المجموع الجبري للاشغال الكلية للمركبات
لانه يمكن ان نقسم الزمن المفروض الحاصل مسافات زمنية صغيرة صغرا كافيا بحيث في كل منها يمكن اعتبار الانتقالات مستقيمة والقوى ثابتة ثم نضع في كل من تلك الازمان الجزئية المذكورة شغل المحصلة يساوي المجموع الجبري لاشغال المركبات ونجمع للمتساويات الناتجة من ذلك فيحدث ان الشغل الكلي للمحصلة يساوي المجموع الجبري لجميع الاشغال الجزئية للقوى المذكورة أعني يساوي المجموع الجبري للاشغال الكلية للمركبات

في القدرة الحية

القدرة الحية لنقطة مادية هي حاصل ضرب نصف جسم تلك النقطة في مربع سرعتها اعني اذا رمزنا لجسم النقطة المادية بالرمز م ولسرعتها في نهاية الزمن ز بالرمز ع يكون $\frac{1}{2}$ م ع٢ هو القدرة الحية للنقطة المادية المفروضة بالنسبة

بالنسبة للسرعة ع واما حاصل ضرب المجسم فى مربع السرعة فيسمى بالقوة الحية ولا تدخل القوة الحيه فى بعض النظريات الا نادراً

فى تقدير الشغل بواسطة القدرة الحية

للبرهنة على ان شغل القوى يمكن تقديره بواسطة القدرة الحية توجد ثلاث حالات

الحالة الأولى – اذا كانت قوة ثابتة ومؤثرة على نقطة مادية

نظرية القدرة الحية – شغل قوة ثابتة واقعة على نقطة مادية يساوى تغير القدرة الحية لأنه اذا فرض ان ق هى القوة الثابتة المؤثرة على نقطة مادية فى اتجاه المسافة المقطوعة فأنها تحدث لها حركة منتظمة العجلة بناء على ما تقدم وحينئذ اذا رمز بالرمز $\underset{.}{ع}$ للسرعة الابتدائية وبالرمز و للعجلة وبالرمز هـ للمسافة المقطوعة فى مدة الزمن ن فبموجب ما تقدم يكون

$$ش_{ق} = ق \times هـ \qquad \text{وحيث ان}$$

$$ق = م\,و \qquad \text{،}$$

$$هـ = \underset{.}{ع}\,ن + \frac{و\,ن^{2}}{2} \qquad \text{فيكون}$$

$$ش_{ق} = م\,\underset{.}{ع}\,و\,ن + م\,\frac{و^{2}ن^{2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

وحيث أن

$$ع = \underset{.}{ع} + و\,ن \qquad \text{فيكون}$$

$$و\,ن = ع - \underset{.}{ع}$$

واذا وضع فى معادلة (١) عوضا عن و ن مقداره يحدث

$$ش_{ق} = م\,\underset{.}{ع}\,(ع - \underset{.}{ع}) + \frac{م\,(ع - \underset{.}{ع})^{2}}{2} = \frac{م\,ع^{2} - م\,\underset{.}{ع}^{2}}{2} \qquad \text{أو}$$

$$ش_{ق} = \frac{1}{2}\,م\,ع^{2} - \frac{1}{2}\,م\,\underset{.}{ع}^{2}$$

أعنى أن شغل القوة المذكورة يساوى القدرة الحية النهائية مطروحا منها القدرة الحية الابتدائية وإذا لم تكن القوة المفروضة متجهة فى اتجاه المسافة المقطوعة فتحصل النتيجة عينها حيث انه يمكن تحليل تلك القوة الى قوتين احداهما عمودية على المسافة المقطوعة ولا تحدث للنقطة المادية المذكورة اذ لا شغل بموجب ما تقدم والأخرى فى اتجاه تلك المسافة المقطوعة ويكون شغلها عين شغل القوة المفروضة كما تقدم أيضا

الحالة الثانية – اذا كانت جملة قوى حيثما اتفق مؤثرة على نقطة مادية

نظرية – الشغل المتحصل من جملة قوى واقعة على نقطة مادية يساوى تغير القدرة الحية لأنه حيث كان شغل المحصلة يساوى المجموع الجبرى لشغل المركبات بموجب ما تقدم فيمكن أن لا نعتبر سوى شغل تلك المحصلة وحينئذ اذا فرض ان خط السير منقسم الى جملة اجزاء صغيرة صغرا كافيا بحيث يمكن اعتبار كل منها مستقيما وان فى مدة قطع كل منها تعتبر المحصلة المذكورة ثابتة الشدة والاتجاه وفرضنا ان م هو مجسم المتحرك وان $\underset{.}{ع}$ هى سرعته الابتدائية ورمزنا بالرموز $ع_{1}$ ، $ع_{2}$ ، $ع_{3}$ ، .... $ع_{ن}$ لسرع المتحرك المذكور فى نهاية كل من الجزء الأول والثانى والثالث ، .... والأخير يكون الشغل المتحصل حينما تقطع النقطة

المادية المذكورة الجزء الأول مساويا الى

$\frac{1}{2}$ م ع$_{1}^{2}$ − $\frac{1}{2}$ م ع$_{0}^{2}$ وحينما تقطع الجزء الثانى مساويا الى

$\frac{1}{2}$ م ع$_{2}^{2}$ − $\frac{1}{2}$ م ع$_{1}^{2}$ وحينما تقطع الجزء الثالث مساويا الى

$\frac{1}{2}$ م ع$_{3}^{2}$ − $\frac{1}{2}$ م ع$_{2}^{2}$

. . . .

وحينما تقطع الجزء الأخير مساويا الى

$\frac{1}{2}$ م ع$_{ن}^{2}$ − $\frac{1}{2}$ م ع$_{ن-1}^{2}$

وبجمع هذه الاشغال الجزئية الى بعضها والاختصار يحدث

الشغل الكلى = $\frac{1}{2}$ م ع$_{ن}^{2}$ − $\frac{1}{2}$ م ع$_{0}^{2}$

أعنى ان الشغل الكلى للمحصلة يساوى القدرة الحية النهائية مطروحا منها القدرة الحية الابتدائية

الحالة الثالثة وهى الحالة العمومية — اذا كان جملة قوى حيثما اتفق واقعة على جملة نقط مادية مرتبطة مع بعضها

اذا اعتبرت فى هذه الحالة جملة حيثما اتفق من النقط المادية متحركة بتأثير عدد حيثما اتفق من القوى فانه بمراعاة جميع القوى الداخلة والخارجة الواقعة على كل من تلك النقط يمكن اعتبار كل منها مطلقا

والقوى الداخلة هى القوى التى تعوض الارتباطات التى تجبر نقط الجملة المادية على التحرك بشروط معينة كبقائها مثلا على ابعاد ثابتة من بعضها أو تحركها على خطوط أو سطوح ثابتة وهكذا

نظرية — المجموع الجبرى لاشغال جميع القوى الواقعة على جملة حيثما اتفق من النقط المادية يساوى المجموع الجبرى لتغيرات القدر الحية لنقط الجملة المذكورة

لأنه بالنسبة لكل نقطة من نقط الجملة المادية يكون شغل محصلة جميع القوى الواقعة على تلك النقطة مساويا الى

$\frac{1}{2}$ م ع^{2} − $\frac{1}{2}$ م ع$_{0}^{2}$

ولأجل الحصول على مقدار الشغل الكلى يلزم ايجاد حاصل جمع الاشغال الجزئية لكن حيث ان هذا الحاصل يتركب من جملة حدود مشابه كل منها الى $\frac{1}{2}$ م ع^{2} التى يمكن بيان مجموعها بالمقدار مجـ $\frac{1}{2}$ م ع^{2} ومن جملة حدود أخر مشابه كل منها الى $\frac{1}{2}$ م ع$_{0}^{2}$ التى يمكن بيان مجموعها بالمقدار مجـ $\frac{1}{2}$ م ع$_{0}^{2}$ فحينئذ اذا رمز لمجموع اشغال جميع القوى الواقعة على الجملة المادية بالرمز شـ ق يكون

شـ ق = $\frac{1}{2}$ مجـ م ع^{2} − $\frac{1}{2}$ مجـ م ع$_{0}^{2}$

وهو المطلوب اثباته

تنبيه — من المهم جدا معرفة انه بواسطة معادلة القدرة يمكن الحصول على شغل اى قوة بدون معرفة شدتها واتجاهها وزمن تأثيرها على المتحرك وانما يكفى فقط معرفة مجسم ذلك المتحرك ومقدار تغير سرعته الناشئ عن تلك القوة

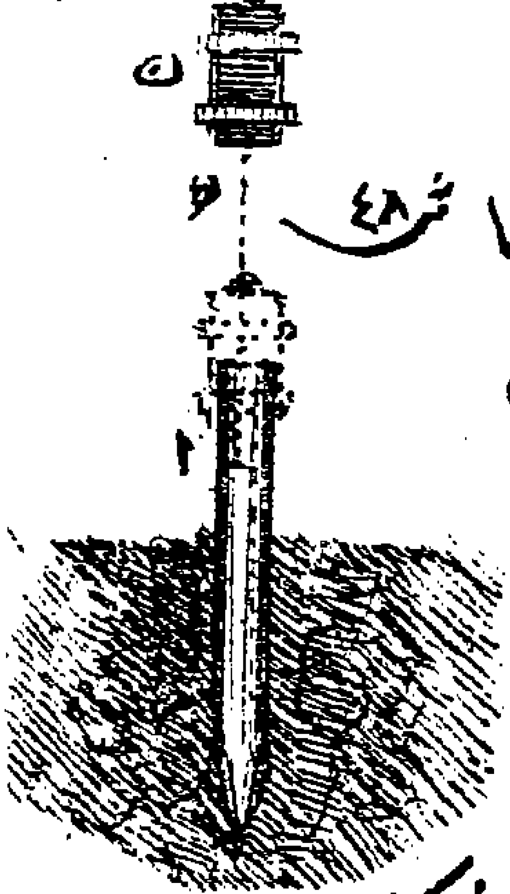
وسنذكر

وسنذكر فيما بعد جملة تطبيقات مهمة جدا على قاعدة القدر الحية لأجل فهم مزية استعمالها

تمرينات

(١) النسبة بين عزم القوة والشغل الجزئى لها ـ المطلوب البرهنة على ان النسبة بين الشغل الجزئى لقوة ثابتة واقعة على نقطة مادية وبين عزمها بالنسبة لنقطة ما كالنسبة بين جزء المسافة وبين بعد ذلك الجزء عن مركز العزم

(٢) الكبش المستعمل فى آلة دق الخوازيق ـ المطلوب تعيين مقاومة الأرض من بعد معلومية ثقل الكبش ك وارتفاع سقوطه ه ومقدار الكمية الصغيرة التى يقطعها الخازوق ا فى النزول من تأثير سقوط الكبش المذكور على قمة شكل ٤٨



(٣) عدة تدور بالخيل ـ اذا ربطت فى عدة دوارة اربعة خيول بحيث ان كلا منها ش ٤٨ يحدث شدا قدره ٣٠,٠ كيلوجرام وان نصف قطر المدار يساوى ٣ متر وأن الخيول تدور خمسة دورات فى كل ٣ دقائق فما يكون مقدار شغل الخيول المذكوره فى مدة ٨ ساعات وما يكون مقدار قوة الآلة التى تحدث نفس الشغل المقدم بالخيول البخارية

(٤) الشغل الناتج من سقوط المياه ـ اذا كان نجرى ماء تصرفه ٥٠ متر مكعب فى كل ٢٤ ساعة وللانتفاع به جعل فيه سد ارتفاعه ٤ متر فما يكون مقدار الشغل الناتج من سقوط المياه من فوق رأس السد المذكور بالخيول البخارية

(٥) شغل البخار ـ اذا كانت آلة بخارية غير انتشارية ومساحة قطاع مكبسها س وطول الرجة فيها ل وضغط البخار فيها ض فما يكون مقدار شغل الآلة المذكورة فى كل ضعف رجه وما يكون شغل تلك الآلة أيضا بالخيول البخارية اذا كان عدد ضعف رجات المكبس فى الدقيقة الواحده هو ن

(٦) الشغل الناتج من انتشار غاز ما ـ اذا كان غاز ضغطه ن جوات داخل فى أسطوانة الى أن يقطع المكبس مسافة قدرها $\frac{1}{ن}$ من مجراه ثم غلق بعد ذلك منفذ دخول الغاز المذكور وصار المكبس متحركا بقوة انتشار ذلك الغاز فما يكون مقدار الشغل المتحصل من الانتشار بفرض عدم تغير درجة الحرارة وما يكون مقدار تأثير الضغط المقاوم

(٧) ما مقدار السمك اللازم اعطاؤه للوح من الخشب حتى لا يثقب بتأثير مقذوف ثقله ه وسرعته ع من بعد ملاحظة ان المقاومة المتوسطة للخشب هى ى

(٨) ما مقدار الشغل المتحصل من بارود داخل ماسورة بندقية من بعد معلومية ان الرصاصة التى ثقلها ه تخرج من البندقية المذكورة بسرعة قدرها ى امتار فى الثانية

انتقال الشغل في الآلات

تطبيق قاعدة القدر والحية على الآلات

الآلة هي جسم أو عدة اجسام مرتبطة بعضها مع بعض معدة لنقل شغل القوى والقوى التي تؤثر على آلة ما بعضها يحرك تلك الآلة ويسمى بالقوى المحركة وشغلها يسمى بالشغل المحرك والبعض الآخر يميل لابطاء أو ايقاف حركة الآلة المذكورة ويسمى بالقوى المقاومة وشغلها يسمى بالشغل المقاوم

الشغل المفيد — شغل المقاومات الثانوية — المقاومات الواقعة على الآلة تنقسم الى مقاومات مفيدة أو أصلية وهي عبارة عن التأثير الذي تحدثه الآلة وشغلها يسمى بالشغل المفيد والى مقاومات ثانوية وهي مثل الاحتكاكات ومقاومات الاوساط والتصادمات والارتجاجات الحاصلة في بعض القطع وهكذا وتلك المقاومات تبتلع بصفة فقد محض جزء من الشغل وشغلها يسمى بشغل المقاومات الثانوية أو الشغل العادم

مثلا عند رفع دلو ماء بواسطة ملفاف فأن القوة التي تؤثر على المنويلة تحدث الشغل المحرك وثقل الماء المرفوع مضروبا في الارتفاع اللازم رفعه اليه هو الشغل المفيد أما ثقل الدلو والحبل والمقاومة الناشئة من الماء والهواء على حركة الدلو والماء المصبوب اثناء الصعود ويبوسة الحبل أي المقاومة اللازم ان يتغلب عليها لأجل ثني الحبل المذكور على الملفاف واحتكاك الصباعين فأن جميع تلك المقاومات تحدث شغلا يسمى بشغل المقاومات الثانوية

حركة أي آلة — كل آلة يمكن اعتبارها كجملة نقط مادية مرتبطة مع بعضها ومتحركة بحركات مخصوصة وعلى ذلك فيمكن تطبيق قاعدة القدر الحية عليها وحينئذ يكون شغل القوى الواقعة على أي آلة مقدارا بتغير القدر الحية

وحيث أن القوى المحركة تؤثر في الجهة المضادة لجهة القوى المقاومة فتكون اشارة شغل القوى المحركة مغايرة لاشارة شغل القوى المقاومة وحينئذ اذا رمز للشغل المحرك بالرمز $ش_م$ والشغل المقاوم بالرمز $ش_ق$ يكون

$$ش_م - ش_ق = \frac{1}{2} م ع^2 - \frac{1}{2} م ع_{.}^2$$

وهذه المعادلة المهمة تسمى بمعادلة الشغل

مناقشة — يلزم اعتبار ثلاث حالات

الاولى ان تكون $ع > ع_{.}$ وحينئذ يحدث $ش_م > ش_ق$

وهذا يحصل في المدة التي فيها تأخذ الآلة في السير وفي تلك المدة تتزايد السرعة حتى تصل سرعة حالة الانتظام

الثانية — أن تكون $ع = ع_{.}$ وحينئذ يحدث

$$ش_م = ش_ق$$

وفي هذه

وفي هذه الحالة تكون الحركة منتظمة وهذا مايعبر عنه بالسير العمومي الذي تكون فيه سرعة الآلة هي سرعة حالة الانتظام

ويفهم من ذلك أنه لاجل ان يكون سير الآلة منتظما يلزم ان تحدث القوى المؤثرة على تلك الآلة شغلا محركا مساويا للشغل المقاوم

الثالثة — ان تكون ع > عَ وحينئذ يحدث

شم > شِ

وفي هذه الحالة سرعة الآلة تتناقص وهي المدة التي فيها تأخذ الآلة في الوقوف والشغل المحرك يكون أصغر من الشغل المقاوم ويتناقص الى ان تقف الآلة

التساوي بين الشغل المحرك والشغل المقاوم — في اثناء مدة السير أعني اثناء المدة التي تمضي بين مبدأ سير الآلة وبين وقوفها يكون الشغل المحرك مساويا طبعا للشغل المقاوم

لأنه في معادلة شم − شِ = ½ م عَ² − ½ م ع² يكون

عَ = ٠ حيث ان الآلة تسير من السكون

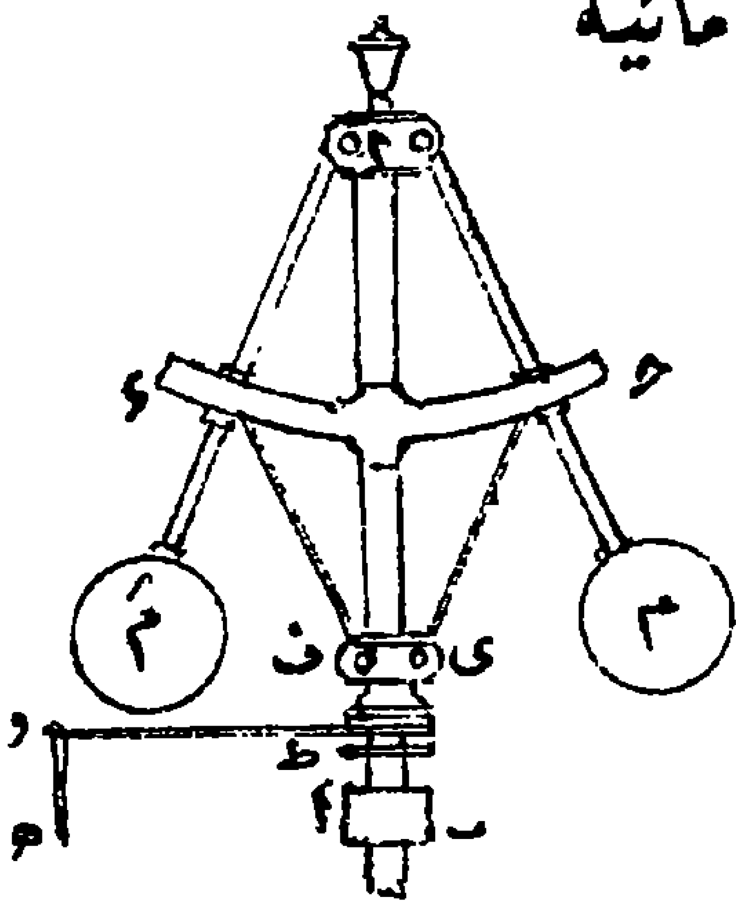
ع = ٠ حيث ان الآلة ترجع الى السكون

فحينئذ يكون شم − شِ = ٠ ومنها يحدث

شم = شِ

سرعة حالة الانتظام — قد ذكرنا فيما تقدم ان الآلة يكون لها سرعة حالة الانتظام متى كانت حركتها منتظمة وحيث ان الحصول على هذه الحالة بالضبط غير ممكن غالبا بسبب أن المقاومات اللازمة ان يتغلب عليها متغيرة جدا فيبحث عن الوصول للقرب من تلك الحالة بقدر الامكان وحيث ان كل تغير دفعي للسرعة ينشأ عنه انضدام وعليه يحصل فقد من الشغل فلاجل منع تغيرات السرعة تستعمل المنظمات والطيارات التي سنذكرها فنقول —

المنظم ذو القوة الطاردة المركزية — المنظمات هي أجهزة تعدل شدة القوة المحركة عادة بتنظيم دخول البخار في اسطوانة البخار مثلا أو بتنظيم دخول كمية الماء التي تدور طارة مائية



والمنظم الكثير الاستعمال هو المنظم ذو القوة الطاردة المركزية أو المنظم ذو الكرتين الذي عدله المعلم وات لاستعماله في الآلات البخارية وهو يتركب كما في شكل ٤٩ من ساق رأسي ٢٢ الذي يتحرك حركة دورانية باتصاله بمحور حركة الآلة ومن ساقين مائلين ٢م ١ ا ٤ مرتبطين ارتباطا مفصليا في ١ ومنتهيين بجسمين ثقيلين م ا مَ مشتركين مع الساق الرأسي السابق ذكره في الحركة الدورانية المذكورة ثم انه مرتبط في ح ٤ ٤ ساقان آخران ح ى ا ٤ ف ارتباطا مفصليا

وهذان الساقان مرتبطان بجلبة ى ف التى تتحرك على طول الساق ٢١ وهذه الجلبة تحرك احد ذراعى رافعة ذات مرفق ط و هـ وذراعها الآخر يفتح أو يغلق منفذ قبول البخار أو يؤثر على اعضاء الانتشار فاذا ازدادت الحركة فأن الكرتين تتباعدان وعليه فالجلبة ترتفع والرافعة ذات المرفق تغلق منفذ القبول واذا نقصت سرعة الآلة فالمنظم يحدث تأثيرا مغايرا للأول

وعيب المنظمات هو تأخير تأثيرها وذلك لأنه يلزم أن تكون الحركة متزايدة قبل ان يؤثر المنظم من أجل أبطائها وحينئذ فلا يكون للمنظمات فائدة الا اذا كان تأثير الاسباب الموجبة لأزدياد الحركة أو لابطائها له مكث

ويمنع التغيرات الدفعية للسرعة بواسطة الطيارات

الطيارات – الطارات هى طارات ذات قطر كبير ومجسم عظيم موزع بانتظام على الخصوص نحو المحيط ففى ابتدأت الآلة فى الحركة فأن الطيارة تبطئ ازدياد السرعة بابتلاع كمية عظيمة من الشغل الى ان تصل سرعة الآلة الى سرعة حالة الانتظام واذا ازدادت المقاومات بعد ذلك فأن الطيارة تترك جزأ من القدرة الحية المشتملة هى عليها وبسبب عظم مجسمها فأن سرعة الآلة تنقص بكيفية غير محسوسة

ويمكن اعتبار الطيارة كمستودع يبتلع الشغل الزائد ويمنع الآلة من الهيجان ثم يتركه عندما يضعف المحرك أو تتزايد المقاومات ويمنع حصول بطئ دفعى

ثم ان وجود الطيارة فى الآلات التى لها ذراع ومنويله ضرورى لأجل التغلب على النقط الميتة وأما الآلات اللوكوموتيف فلا تستعمل فيها الطيارات بسبب عظم حساباتها وزيادة على ذلك فأن تلك الآلات لها جملة اذرعة لتنظيم تأثير القوة المحركة

ومتى علمت التغيرات التى يمكن ان تحدثها المقاومة فأنه يمكن تعيين مقادير ابعاد الطيارة بحيث ان تغيرات السرعة لاتتجاوز حدا معينا كمقدار $\frac{1}{40}$ مثلا من سرعة حالة الانتظام

وعيب الطيارة هو تكبير شغل المقاومات الثانوية بمقدار عظيم بسبب الاحتكاك الحاصل من إصبعيها على مسنديها

الشغل المفيد – جودة الآلة – قد علم ما تقدم ان الشغل المقاوم يتركب من الشغل المفيد ومن شغل المقاومات الثانوية وحينئذ يكون

$$ش_م = ش_ف + ش_ث$$

وحيث ان ش = ش_م بموجب ما تقدم فيكون

$$ش_م = ش_ف + ش_ث$$

ويفهم من ذلك ان الآلة تكون جيدة كلما كان شغل المقاومات الثانوية ضعيفا حيث انه فى هذه الحالة يكون الشغل المفيد جزأ عظيما من الشغل المحرك

فالنسبة بين الشغل المفيد والشغل المحرك هى ما تسمى بجودة الآلة أو بمعامل التأثير المفيد وعلى هذا فتكون الجودة

الجودة المذكورة مبينة بالمقدار $\frac{ش_ق}{ش_م}$

وحيث أنه من المستحيل اعدام شغل المقاومات الثانوية فتكون الجودة دائماً أصغر من الواحد ولا تجاوز ٧٥ر٠ في الآلات الجيدة الا نادرا

وحينئذ يكون من المهم جدا تقليل المقاومات الثانوية ما امكن ولذلك يلزم تقليل القطع المتحركة وتلطيف الاحتكاكات بصقل القطع المتماسة وحفظ الدهانات على حالة جيدة وضبط القطع كي تصير الأخلية قليلة ويحصل تقليل الارتجاجات ما امكن وهكذا ومع ذلك فجميع هذه الاحتراسات لا يمكنها سوى تقليل المقاومات الثانوية وليس محوها بالكلية وعليه فتقل الشغل المقاوم فقط ولا انعدمه

ويعلم من ذلك أنه يستحيل حينئذ التوصل الى شغل مساو للشغل المحرك حيث أنه بأى آلة كانت لا يحصل الا على جزء من الشغل المحرك

من الحبث البحث عن الحركة الدائمية ـ الحركة الدائمية موجودة من ابتداء خلقة العالم فان حركات الكواكب والبحار والانهار وهكذا مستمرة الوجود الى الآن ويمكن الانتفاع بأحدها بواسطة الآلات التي تتحرك مادامت قابلة للاستعمال

وأما البحث عن الحركة الدائمية التي نحن بصددها فهو أمر مخالف لذلك اذ الغرض منه ايجاد آلة تتحرك تحركا لا نهاية له وتؤدى الى عمل مفيد وذلك بواسطة تأثير محرك عليها مدة قليلة من الزمن فقط

فهذا الامر عبث محض لأنه ولو فرض عدم الحصول على ادنى عمل مفيد فأنه من المستحيل أن التأثير المحدود الناشئ عن محرك أن يؤدى للآلة حركة تستمر بلا نهاية

وللبرهنة على ذلك يقال أنه بالنسبة لأى آلة بناء على ما تقدم يكون

$$ش_م = ش_ق \quad \text{أو}$$

$$ق \times هـ = ك \times ء$$

وحيث ان فى هذه الحالة مقدار الطرف الأول من المعادلة المذكورة محدود بسبب ان مقدار كل من القوة المحركة ق والمسافة هـ التي تقطعها محدود وصغير نوعا على العموم فلا يمكن ان يكون الطرف الثانى غير محدود وحيث انه مهما كان صغر مقدار المقاومة ك لا يمكن ان تكون معدومة فالعامل الثانى ء يكون له طبعا مقدار محدود وبالأولى يكون محدودا اذا كانت الآلة ملزومة لأن تؤدى عملا مفيدا وهو المطلوب

تحقيق قاعدة انتقال الشغل

قد ذكرنا فيما تقدم أن الآلة تنقل الشغل المحرك وفى مدة من السير يكون الشغل المحرك مساويا للشغل المقاوم فهذا ما يعبر عنه بقاعدة انتقال الشغل

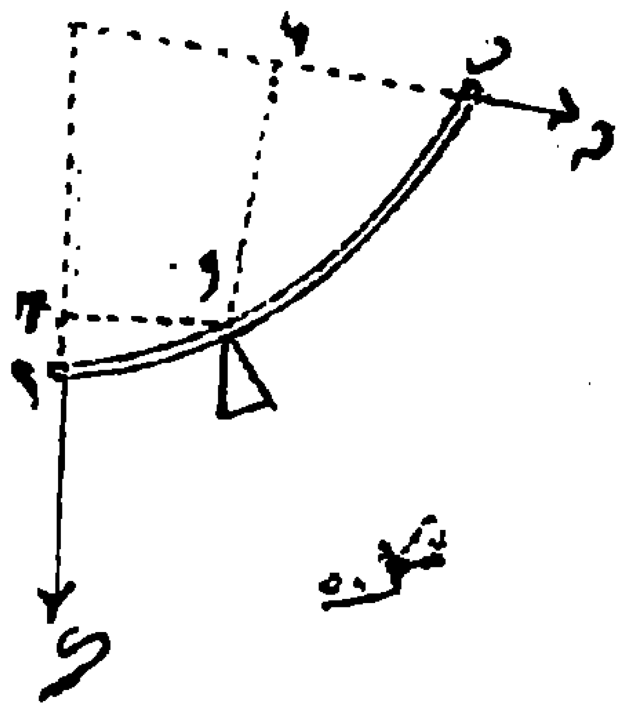
وتتحقق بالسهولة هذه القاعدة في الآلات البسيطة المتحركة بانتظام بتأثير قوتين

وذلك لأنه حيث كانت الحركة منتظمة فالقوة ق والمقاومة ك تتزنان معا اذ بخلاف ذلك يكون لهما محصلة مؤثرة على الآلة بالاستمرار وتحدث لها حركة متغيرة وهذا مخالف للغرض فحينئذ تسير الآلة

بناء على خاصية القصور الذاتى أعنى يكون الشغل المحرك يساوى الشغل المقاوم وتحقق التساوى بين الشغل المحرك والشغل المقاوم فى الحالة الخصوصية التى نحن بصددها باتخاذ الرافعة مثلا وباتباع سير مشابه لذلك يجرى التحقيق عينه بالنسبة للآلات البسيطة الأخر المتحركة بانتظام الذى سيطلب فيما بعد بصفة تمرين

تحقيق قاعدة الشغل فى الرافعة — اذا كان ا و ب شكل ٤ رافعة متأثرة بقوتى ف ، ك فنفرض أن القوتين المذكورتين مؤثرتان فى النهايتين ى ، ح لذراعى رافعتها

وحيث ان القوتين المذكورتين عموديتان دائما على ذراعى رافعتها بسبب حصول التوازن فى اثناء الحركة فاذا رمز بحرفى م ، ﻫ للقوسين المرسومين بالنقطتين ى ، ح يكون شغل القوة ف مساويا الى ف م بموجب ما تقدم وشغل القوة ك مساويا الى ك ﻫ



وحيث ان القوتين ف ، ك متزنتان فبموجب ما تقدم يكون $\frac{ف}{ك} = \frac{وح}{وى}$

وكذا حيث ان القوسين م ، ﻫ متشابهان فيكونان متناسبين لنصفى قطريهما ويحدث

$$\frac{ﻫ}{م} = \frac{وح}{وى}$$ وحينئذ يكون

$$\frac{ف}{ك} = \frac{ﻫ}{م}$$ ومنها يحدث

$$ف م = ك ﻫ$$

أعنى ان الشغل المحرك يساوى الشغل المقاوم وهو المطلوب

ما يكتسب من القوة يفقد من السرعة — هذه القاعدة التى يلزم مراعاتها ناتجة من قاعدة انتقال الشغل وذلك لأن كل شغل محرك يقابل لشغل مقاوم مساو له ولكن الشغل المقاوم المذكور هو حاصل ضرب عاملين بحيث اذا كبر احدهما صغر الآخر فحينئذ اذا كبرت القوة التى يلزم ان يتغلب عليها صغرت المسافة التى تقطعها وبالعكس اذا أريد تكبير المسافة فالقوة التى يلزم ان يتغلب عليها تصير صغيرة وعلى هذا فيرى ان ما يكتسب من القوة يفقد من المسافة المقطوعة

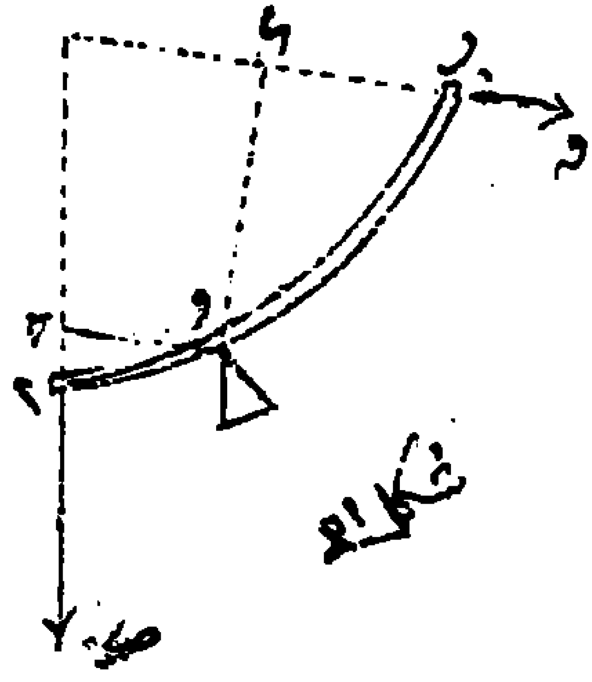
ومع ذلك فينطق بالقاعدة المذكورة عادة هكذا

ما يكتسب من القوة يفقد من السرعة

شروط توازن الآلات البسيطة المحصلة تلك الشروط بواسطة معادلة الشغل

التساوى بين الشغل المحرك والشغل المقاوم فى الآلات المتحركة بانتظام يوصل بطريقة بسيطة جدا لشروط توازن القوى الواقعة على تلك الآلات

توازن الرافعة — حيث ان الرافعة ا و ب شكل ٤ متحركة بانتظام بتأثير القوتين ف ، ك فتكون هاتان



هاتان القوتان متزنتين بموجب ما تقدم واذا فرض أنهما واقعتان في نقطتي ء، حـ اللتين هما نهايتا ذراعي رافعتهما فتكون هاتان القوتان عموديتين دائماً على و ء ، و حـ ما دام التوازن حاصلاً وحينئذ اذا رمز بالرمزين م، ن للمسافتين المقطوعتين بالنقطتين ء، حـ فان معادلة الشغل تكون هي

$$ق م = ك ن \quad \text{ومنها يحدث}$$

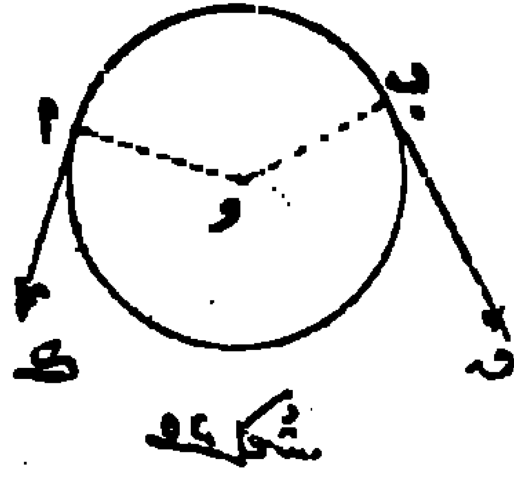
$$\frac{ق}{ك} = \frac{ن}{م} \quad \text{ولكن بناء على ما تقدم يكون}$$

$$\frac{ن}{م} = \frac{و حـ}{و ء} \quad \text{وحينئذ يحدث}$$

$$\frac{ق}{ك} = \frac{و حـ}{و ء}$$

اعنى ان القوة والمقاومة متناسبتان عكساً لذراعي رافعتهما وهذا هو الشرط الذي وجد سابقاً في علم الاستاتيك

توازن البكرة الثابتة — حيث ان المسافتين المقطوعتين بالنقطتين ا، ب شكل ٤١ متساويتان بالبداهة فمعادلة الشغل تكون

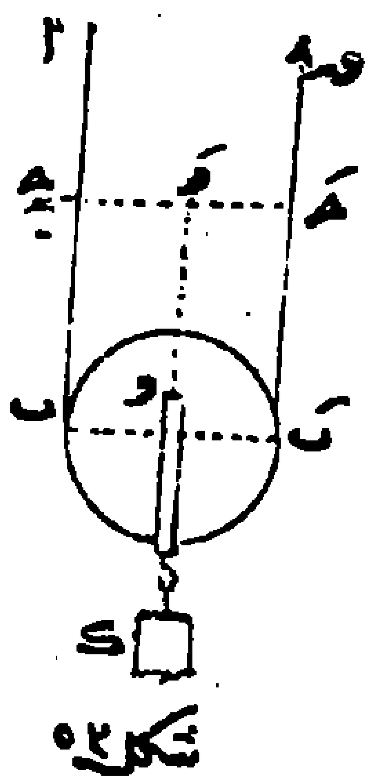


$$ق م = ك م \quad \text{وحينئذ يكون}$$

$$ق = ك$$

وهذا هو شرط توازن البكرة الثابتة السابق ايجاده

توازن البكرة المتحركة — الحالة البسيطة المستعملة كثيراً في العمل هي التي فيها يكون الحبلان متوازيين وهي التي سنشتغل بها هنا فنقول اذا فرض ان و وَ شكل ٤٢ هو الارتفاع الذي ارتفعت اليه البكرة أو الحمل ك فان كلا من الحبلين ينقص بمقدار و وَ وحينئذ فالقوة ق يلزم ان تتحرك بمقدار ٢ × و وَ وعلى هذا في معادلة الشغل التي هي



$$ق م = ك ن \quad \text{يكون}$$

$$م = ٢ ن \quad \text{وحينئذ يحدث}$$

$$ق × ٢ ن = ك ن \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{ق}{ك} = \frac{١}{٢}$$

وهذا هو عين الشرط السابق ايجاده في الاستاتيك

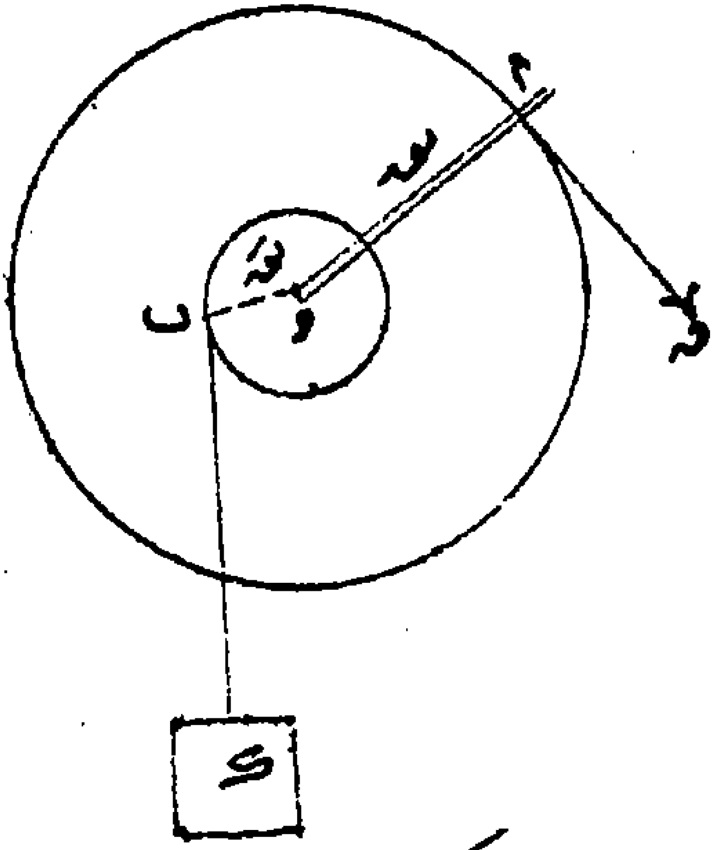
توازن الملفاف — حيث ان القوتين ق، ك مؤثرتان بالتماس للمحيطين و ا، و ب شكل ٤٣ لحتى دار الملفاف دورة كاملة يكون ش ق = ق × ٢ ط نق ،

$$ش ك = ك × ٢ ط نقَ$$

وحينئذ فمعادلة الشغل تكون

$$ق \times ٢ ط نق = ك \times ٢ ط نَق$$ ومنها يحدث

$$\frac{ق}{ك} = \frac{نَق}{نق}$$



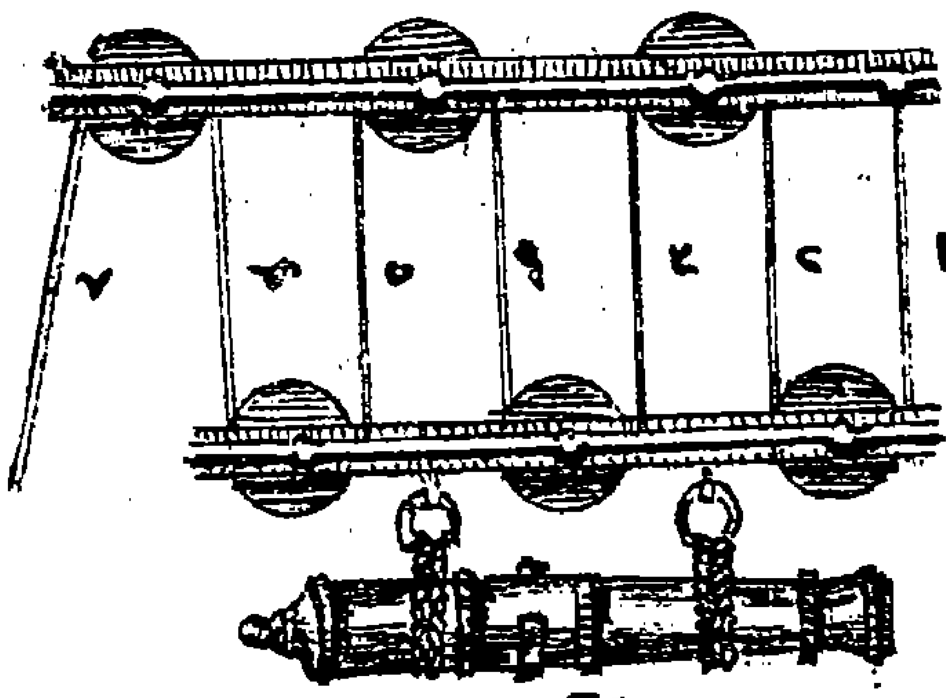
شكل ٥٤

وهى المعادلة المعروفة فى الاستاتيك

توازن البلنكو — اذا كان البلنكو كما فى شكل ٥٥ فانه اذا ارتفعت مقاومة ك بمقدار هـ فان كلا من الستة احبال ينقص بقدر الارتفاع المذكور والقوة ق الواقعة على نهاية الحبل السابع تشتغل بمقدار مساو الى ٦ هـ ومعادلة الشغل تؤول الى

$$ك هـ = ق \times ٦ هـ$$ ومنها يحدث

$$ق = \frac{ك}{٦}$$


شكل ٥٥

توازن المستوى المائل — اذا فرض ان ل هى المسافة المقطوعة بجسم على طول المستوى المائل شكل ٥٦ فان شغل القوة ق بموجب ما تقدم يكون مساويا الى

$$ق حتا ب \times ل$$

وشغل المقاومة ك يكون مساويا الى

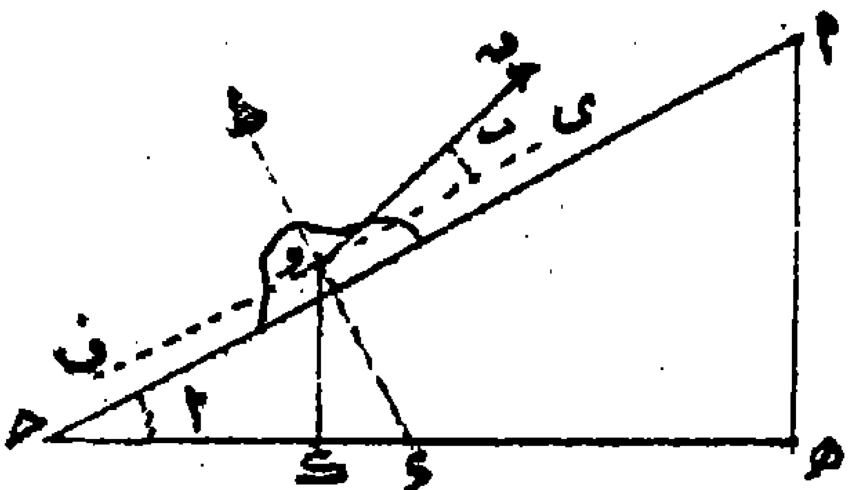
$$ل \times ك حتا ك و ف$$ أو

$$ك حا ا \times ل$$

وحينئذ فمعادلة الشغل تكون

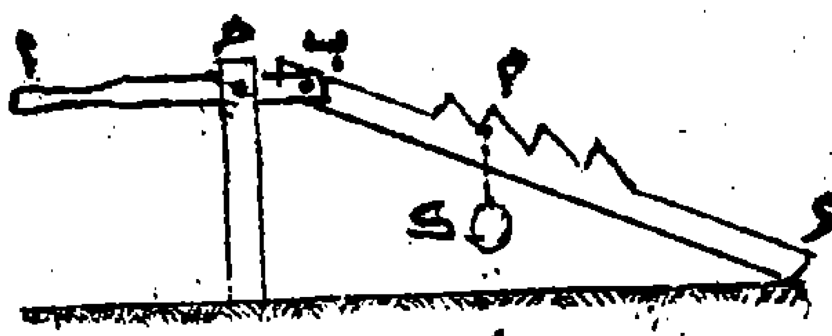
$$ق ل حتا ب = ك ل حا ا$$ ومنها يحدث

$$\frac{ق}{ك} = \frac{حا ا}{حتا ب}$$


شكل ٥٦

وهذا هو الشرط الذى وجد فى الاستاتيك بالنسبة للمستوى المائل

توازن الرافعة المضاعفة المستعملة لرفع العربات — لاجل رفع عربة بواسطة هذه الآلة شكل ٥٧ يعشق احد الاسنان م للرافعة ب ء اسفل الدنجل ويضغط على المقبض ا لنهاية الرافعة ب ا وحساب مقدار الثقل ق اللازم ايقاعه على الرافعة ا ب المفروض انها افقية بحيث يتزن مع الثقل ك المؤثر فى م بناء على معادلة الشغل


شكل ٥٧

نفرض ان مَ ، بَ ، اَ هى الانتقالات الآنية الصغيرة جدا للنقط م ، ب ، ا

وحينئذ من معادلة الشغل $ق اَ = ك مَ$ يكون

$$ق = ك \times \frac{مَ}{اَ}$$

وحيث ان $\frac{\text{مَ}}{\text{ن}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءب}}$ ، $\frac{\text{تَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{حب}}{\text{حا}}$ فيكون

$\frac{\text{مَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءب}} \times \frac{\text{حب}}{\text{حا}}$ وحينئذ يكون

$$\text{ق} = \text{ك} \times \frac{\text{ءم} \times \text{حب}}{\text{ءب} \times \text{حا}}$$

وهذا المقدار هو عين المقدار الذى يستنتج بناء على شروط التوازن

توازن الملفاف الفرقى ـ لنفرض ملفافا اسطوانته مكونة من جزئين نصفا قطريهما مختلفان كما فى شكل ٥٨ وان الحمل ك معلق فى حبل بواسطة بكرة متحركة ا بحيث ان فرعى الحبل المذكور المارين على البكرة المذكورة متوازيان وملتفان على التناظر على الاسطوانتين ه ، هَ اللتين نصفا قطريهما نعهَ ، نعه ولنفرض ان التوازن حاصل بواسطة قوة ق الواقعة بالتماس على محيط دائرة نصف قطرها بعه المرسوم بأحدى المنويلتين ء ثم نحدث بالملفاف المذكور انتقال زاويا حول محوره قدره ـ فحينئذ نقطة ء تنتقل بمقدار بعه ـ والفرع ه يلتف بمقدار نعه ـ والفرع هَ ينفك بمقدار نعهَ ـ والثقل ك يرتفع بمقدار نصف الفرق (نعه ـ نعهَ) ـ ومعادلة الشغل تؤول الى

$$\text{ق بعه ـ} = \text{ك} \times \frac{(\text{نعه} - \text{نعهَ})\text{ ـ}}{2}$$ أو

$$\text{ق} = \frac{\text{ك}}{2} \times \frac{\text{نعه} - \text{نعهَ}}{\text{بعه}}$$

شكل ٥٨

وهو عين الشرط السابق ايجاده فى الاستاتيك

توازن البريمة ـ البريمة لا تستعمل فقط فى الآلات الدقيقة بل تستعمل ايضا بكثرة عندما يحتاج الأمر الى قوة عظيمة

فحينئذ اذا قطعت القوة ق شكل ٥٩ المسافة ٢ ط ل فأن المقاومة ك تقطع الارتفاع هـ ومعادلة الشغل تؤول الى

$\text{ق} \times 2\,\text{ط ل} = \text{ك هـ}$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{هـ}}{2\,\text{ط ل}}$$

ويفهم من ذلك انه متى كانت البريمة متزنة يكون نسبة القوة الى المقاومة كنسبة خطوة البريمة الى طول المحيط المرسوم بنصف قطر مساو للذراع اى للمويلة

شكل ٥٩

توازن البريمة الفرقية ـ حيث انه فى هذه البريمة شكل ٦٠ تكون المسافة المقطوعة بالقوة مساوية

الى ٢ ط ل والمسافة المقطوعة بالمقاومة مساوية الى هـ - هَ فمعادلة الشغل تؤول الى

$$\text{ق} \times \text{٢ ط ل} = \text{ك} \, (\text{هـ} - \text{هَ})$$

ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{هـ} - \text{هَ}}{\text{٢ ط ل}}$$

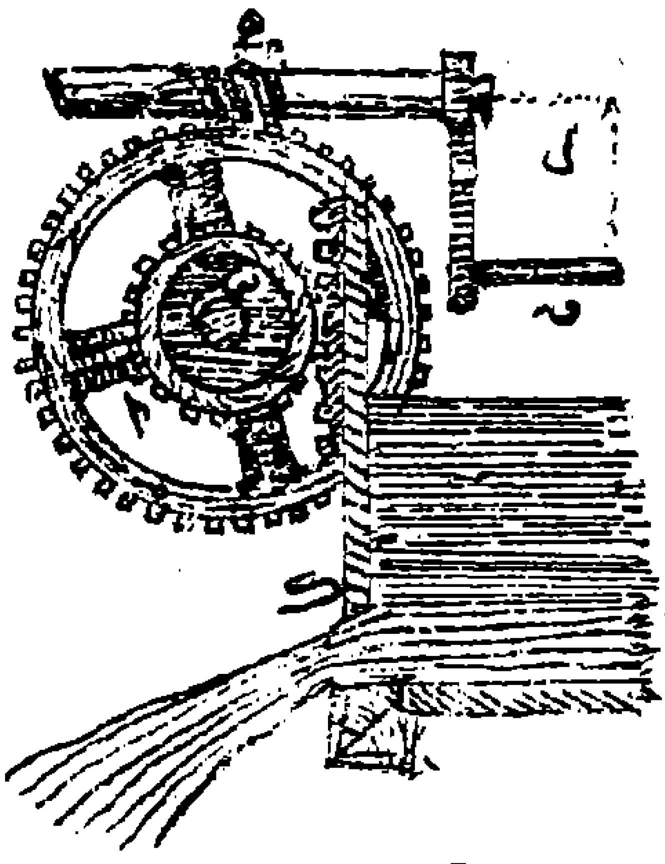
شكل ٦٠

توازن البريمة غير المنتهية - حيث انه في هذه الآلة شكل ٦١ تكون المسافة المقطوعة بالقوة هي ٢ ط ل والمسافة المقطوعة بالمقاومة هي $\frac{\text{هـ} \times \text{نَق}}{\text{نق}}$ فمعادلة الشغل تؤول الى

$$\text{ق} \times \text{٢ ط ل} = \text{ك} \times \frac{\text{هـ} \times \text{نَق}}{\text{نق}}$$

ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{هـ نَق}}{\text{٢ ط ل نق}}$$



شكل ٦١

وحيث ان البسط اصغر كثير من المقام فحينئذ هذه الآلة تحدث تأثيرات عظيمة بقوة ضعيفة

تمرينات

(١) - المطلوب تحقيق قاعدة الشغل في الآلات الآتية

الأولى البكرة الثابتة

الثانية البكرة المتحركة في حالة ما يكون الحبلين متوازيين

الثالثة الميزان

الرابعة الملفاف

الخامسة المستوى المائل

(٢) المطلوب ايجاد شرط التوازن بناء على معادلة الشغل في الآلات الآتية

الأولى البلنكو المعتاد

الثانية الملفاف ذو الطارة المسننة

الثالثة المعزة

الرابعة الميزان الجسيم

الخامسة العفريتة

السادسة البلنكو الفرقي

(٣) المطلوب ايجاد شروط توازن البكرة المتحركة في حالة ما يكون الحبلان غير متوازيين وذلك بناء على معادلة الشغل

في المقاومات الثانوية

المقاومات الثانوية هي التي تبتلع جزأ من الشغل بدون ان تحدث أدنى تأثير مفيد والمقاومات الثانوية الرئيسة هي

أولا الاحتكاك

ثانيا مقاومة الأوساط

ثالثا التصادمات

رابعا يبوسة الأحبال

ولنتكلم على تلك المقاومات بالترتيب فنقول

في الاحتكاك

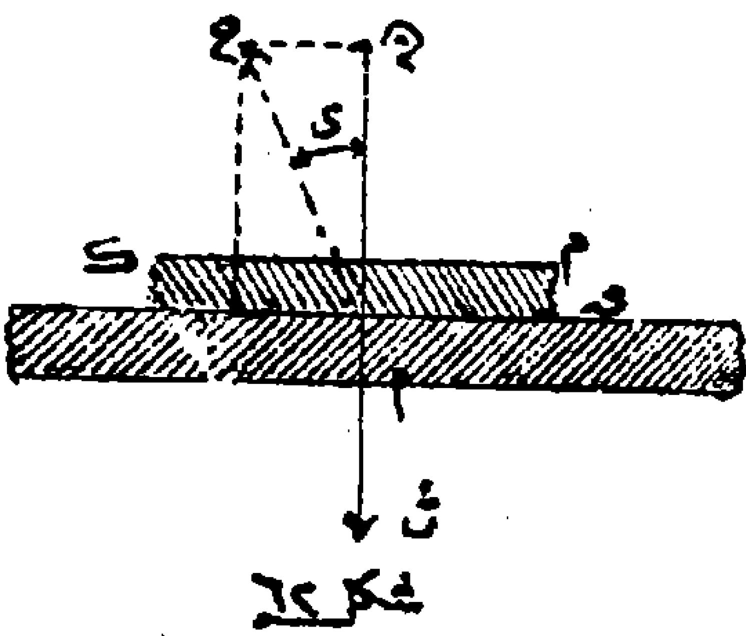
قد ظهر من التجربة أنه لأجل زلق جسم ما على مستو افقي يلزم وجود قوة ذات شدة معينة بحيث اذا أثر عليه بتأثير أقل من تلك القوة يبقى الجسم المذكور ساكنا وحينئذ فذلك الجسم يكون متأثرا بثقله وبالقوة التي تميل لتحريكه ولكن حيث أن هاتين القوتين لهما محصلة مائلة على المستوى ولا تنعدم الا برد فعل ذلك المستوى فحينئذ يكون رد الفعل المذكور مائلا على سطح المستوى المذكور ويمكن تحليله الى قوتين احداهما عمودية على المستوى وتتزن مع ثقل الجسم المذكور ولا تحدث ادنى مقاومة للحركة والأخرى مماسة للسطح السابق ذكره وهي التي يلزم ان يتغلب عليها لأجل تحريك ذلك الجسم

وحينئذ متى ابتدأ الجسم المذكور في الحركة فان رد الفعل المماس يكون هو الاحتكاك في مبدأ الحركة

وقد ظهر من التجربة أيضا أنه متى كان الجسم متحركا على سطح افقي بناء على سرعته المكتسبة فان حركته تأخذ في النقص بالاستمرار الى ان يسكن المتحرك المذكور ويفهم من ذلك حينئذ انه لابد من وجود قوة متجهة في الجهة المضادة للحركة كانت سببا في اعدام القدرة الحية التي كانت لذلك الجسم فهذه القوة المماسة للسطح المذكور هي الاحتكاك في اثناء الحركة

وعلى هذا فلا يكون لقوة الاحتكاك وجود متى كان الجسم غير متأثر بالحركة وأنها تأخذ في الظهور متى مالت قوة لتحريكه وتتزايد بازدياد القوة المحركة الى ان يتحرك الجسم المذكور وحينئذ فتكون مساوية للقوة المحركة المذكورة ثم ان قوة الاحتكاك تنقص عادة قليلا بمجرد تحرك الجسم وبعد ذلك تبقى ثابتة في مدة الحركة

وقوة الاحتكاك هي دائما متجهة في الجهة المضادة للحركة



زاوية الاحتكاك - اذا فرض جسم م شكل ٦٦ موضوع على مستو افقي وكان متأثرا بثقله ث فقط فان رد الفعل ه للمستوى يكون مساويا ومضادا مباشرة للثقل ث لكن اذا أوقع على الجسم المذكور قوة مثل ق بحيث يصير ازديادها شيئا فشيئا الى أن يتحرك الجسم فان تلك القوة تكون مساوية لقوة

الاحتكاك ك

وحينئذ فالجسم يكون متأثرا بالقوتين ث ، ه وبرد الفعل ع للمستوى ورد الفعل هذا يمكن اعتباره مؤثرا فى النقطة ا التى هى نقطة تلاقى الرأسى المار بمركز ثقل الجسم بالمستوى الأسفل له وحيث أن الجسم متزن فيلزم ان يكون رد الفعل ع مساويا ومضادا مباشرة لمحصلة القوتين ه ، ث

اذا تقرر هذا فالزاوية ى التى يصنعها رد الفعل المذكور مع الخط العمودى للسطح المضغوط هى ما تسمى بزاوية الاحتكاك

معامل الاحتكاك ـ معامل الاحتكاك هو النسبة بين قوة الاحتكاك والضغط العمودى للجسم على السطح المضغوط وحينئذ اذا رمز لمعامل الاحتكاك المذكور بالرمز ى يكون

$$ى = \frac{ك}{ض} = \frac{ه}{ث}$$

ولكن من مثلث ا ع ض القائم الزاوية يحدث

$$\frac{ع ض}{ا ض} = \frac{ك}{ض} = طا ى \quad \text{وعليه يكون}$$

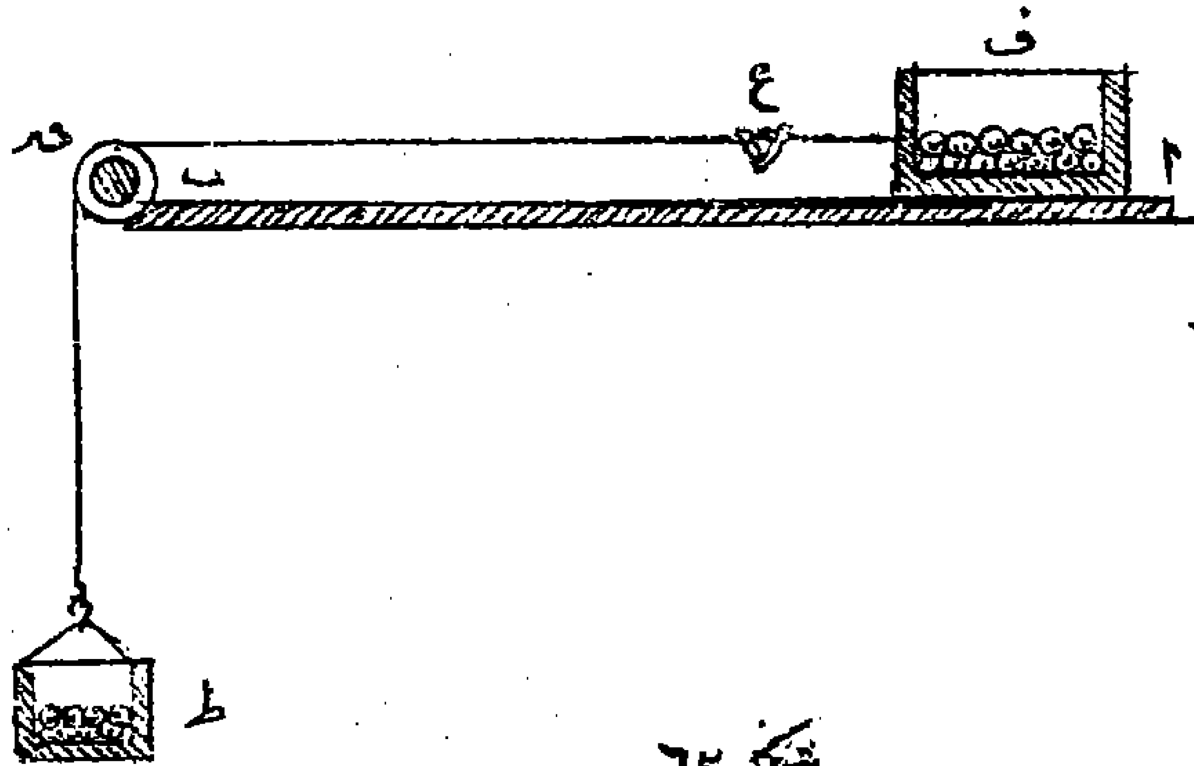
$$ى = طا ى$$

أعنى ان معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك

ممارسة الاحتكاك بالتجربة

الاحتكاك فى مبدأ الحركة ـ قوانين الاحتكاك وضعها المعلم كلومب بناء على التجارب التى اجراها ثم حققها بعده المعلم موران بطرق دقيقة جدا كما يأتى

وهى أنه جعل مدادة عريضة من البلوط ا ب شكل ٦٢ افقية بالضبط ووضع عليها صندوقا ف مشتملا على ثقل معلوم وربط ذلك الصندوق بحبل مرتبط بديناموتر ع ومار على مقر بكرة ه ثم علق فى نهاية الحبل المذكور كفة مثل ط ووضع فيها اثقالا تدريجيا الى ان ابتدأ الصندوق ف فى التحرك ورصد شدة الحبل من الديناموتر ع فهذه الشدة تكون مساوية لقوة الاحتكاك ك وبقسمة تلك القوة على ث الذى هو عبارة عن الضغط الرأسى للصندوق على المدادة ينتج مقدار معامل الاحتكاك ى فى مبدأ الحركة



شكل ٦٢

ويمكن تغيير مقدار الحمل الذى يوضع داخل الصندوق وكذلك السطوح المحتكة بتكسية المدادة وقاع الصندوق من الخارج بالسطوح المختلفة التى يراد اجراء التجربة عليها

الاحتكاك فى مدة الحركة ـ قد وصل المعلم موران حركة البكرة ه بجهاز مبين للحركة فرأى ان حركة الصندوق منتظمة العجلة وعلم حينئذ انها ناشئة من قوة ثابتة (بموجب ما تقدم) وتلك القوة المحركة

تساوى

تساوى بداهة للفرق بين شد الحبل للصندوق الذى يرمز له بالرمز ش وبين قوة الاحتكاك مدة الحركة التى يرمز لها بالرمز ك ولكن قد ظهر من رصد الديناموميتر أن ش ثابت مدة تحرك الصندوق وحيث أن الفرق ش ـ ك ثابت أيضا كما تقدم فيعلم من ذلك أن ك تكون ثابتة وعليه فتكون قوة الاحتكاك غير متعلقة بالسرعة

ولأجل تعيين مقدار ك تقدر بالضبط المسافة ﻫ التى يقطعها الصندوق فى الزمن ز ثم يرمز لثقل الكفة ط مع الحمل الذى فيها بالرمز م ولثقل الصندوق مع حمله بالرمز ث ثم يقال حيث ان القوة م ـ ك تحدث لجسم $\frac{\text{م}+\text{ث}}{\text{ح}}$ حركة منتظمة العجلة التى يرمز لعجلتها بالرمز و فيكون

$$\text{م} - \text{ك} = \frac{\text{م}+\text{ث}}{\text{ح}} \times \text{و}$$

ولكن بموجب ما تقدم $\text{ﻫ} = \frac{\text{و}\,\text{ز}^2}{2}$ ومنها يحدث

$$\text{و} = \frac{2\,\text{ﻫ}}{\text{ز}^2}$$

وعليه يكون

$$\text{م} - \text{ك} = \frac{\text{م}+\text{ث}}{\text{ح}} \times \frac{2\,\text{ﻫ}}{\text{ز}^2}$$

أو

$$\text{ك} = \text{م} - \frac{\text{م}+\text{ث}}{\text{ح}} \times \frac{2\,\text{ﻫ}}{\text{ز}^2}$$

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار ك وبقسمة ك على ث يحصل على مقدار معامل الاحتكاك فى مدة الحركة الذى يرمز اليه بالرمز ى

قوانين الاحتكاك ـ قد ظهر من تجارب المعلم كلومب والمعلم موران القوانين الآتية

الأول قوة الاحتكاك تناسب الضغط العمودى

الثانى انها تتعلق بجنس سطوح التماس

الثالث انها غير متعلقة باتساع سطوح التماس

الرابع انها غير متعلقة بسرعة الحركة

الخامس بالنسبة للأجسام القابلة للانضغاط فانه بعد حصول التماس بمدة قليلة يكون الاحتكاك كبيرا فى مبدأ الحركة عن مدة الحركة وأما بالنسبة للأجسام الصلبة فيقطع النظر عن هذا الفرق بسبب أنه يكون صغيرا جداً

تنبيهات

الأول ـ ولو أن قوة الاحتكاك غير متعلقة بالسرعة لكن الشغل المستلم بالأحتكاك ليس كذلك لأنه اذا رمز للضغط العمودى بالرمز م ولسرعة الجسم بالرمز ع ولمعامل الاحتكاك بالرمز ى فان مقدار شغل الاحتكاك فى مدة ثانية يكون

$$\text{شغل الاحتكاك} = \text{م}\,\text{ى} \times \text{ع}$$

ويفهم من ذلك ان شغل الاحتكاك مناسبا للسرعة

الثانى ـ القانون الرابع للأحتكاك لم يحققه المعلم موران الا بالنسبة للسرع المحصورة بين صفر

واربعة امتار في الثانية لكن قد ثبت من التجارب الأخيرة أنه متى وصلت السرعة الى ٫٣٠ في الثانية فأن الأحتكاك ينقص نقصا ظاهرا بمجرد ازدياد السرعة عن الحد المذكور

احتكاك الاصابع – اعلم ان احتكاك الأصابع على مساندها هو عين احتكاك السطوح المستوية على بعضها ومن المهم اعطاء الأصابع قطراً أصغر ما يمكن بحيث يكون مناسبا لصلابة الآلة لأنه اذا فرض ان نو هو نصف قطر الأصبع وان ه هو الضغط العمودى الذى يحدثه الأصبع على المسند وأن د هو معامل الاحتكاك وان ن هو عدد الدورات فى الدقيقة فتكون قوة الاحتكاك هى ه د والمسافة المقطوعة فى الثانية هى ٢ ط نو ن

والشغل المبتلع بالاحتكاك الذى يرمز اليه بالرمز ش هو ش = ٢ ط د ن نو ه

ويرى من ذلك ان الشغل العادم بالاحتكاك يزداد تبعا لنصف قطر الأصبع ويكون من المفيد حينئذ تقليل نصف القطر المذكور وانما يمكن تطويل الأصبع بدون حصول ادنى ضرر حيث ان الأحتكاك غير متعلق باتساع سطوح التماس

الدهانات – قد ظهر من التجربة ان الاحتكاك ينقص نقصا عظيما باستعمال الدهانات الموافقة بين السطوح المحتكة فأن معامل أحتكاك الحديد على الظهر الذى هو ٥٫١ يتخفض الى ٠٫٠٣ باستعمال دهان الزيت المجدد بالاستمرار

ويفهم من ذلك حينئذ انه من الضرورى دهان السطوح المحتكة وأن آلات التزييت اوالتشحيم هى من الأمور المهمة جدا

وأحسن الدهانات فى جميع الأحوال هو الدهان السائل الذى لا يندفع الى الخارج فى الأحوال المستعمل فيها

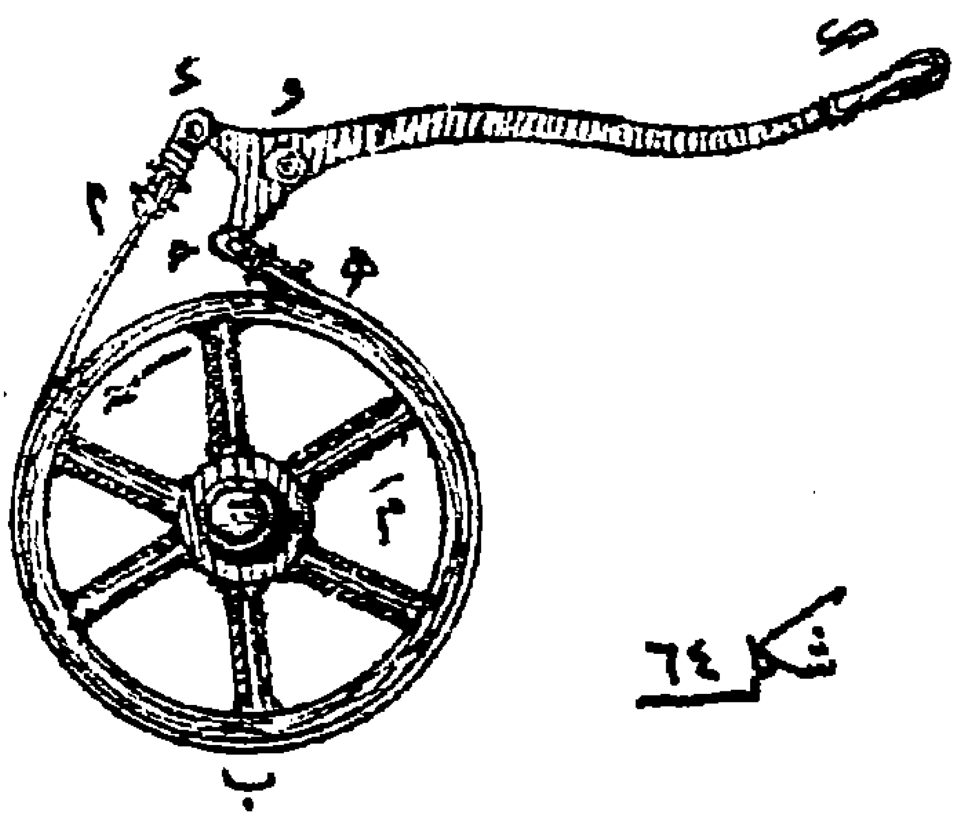
فالهواء يكون دهانا جيدا اذا أمكن حفظه بين السطوح المحتكة والماء يكون افضل من الزيت ان لم يكن سريع الانقذاف بالسهولة وقد يستعمل الماء بكثرة لمنع تسخين القطع بالاحتكاك وفى هذه الحالة يفضل استعمال ماء الصابون

تطبيقات الأحتكاك

ولو أن الأحتكاك مقاومة ثانوية تبتلع عادة بلا فائدة جزأ من الشغل المحرك الا أنه مفيد فى كثير من الأحوال فأنه لولا الاحتكاك لما أمكن سير الادمى والحيوانات ووابورات السكك الحديد على الأرض وعلى القضبان وما امكن تثبيت المسامير المعتادة والمسامير البرمة فى الاجسام الناعمة وما أمكن ثبات سيور الحركة على طنابيرها وما امكن ثبات المستويات المائلة بميل قليل وهكذا

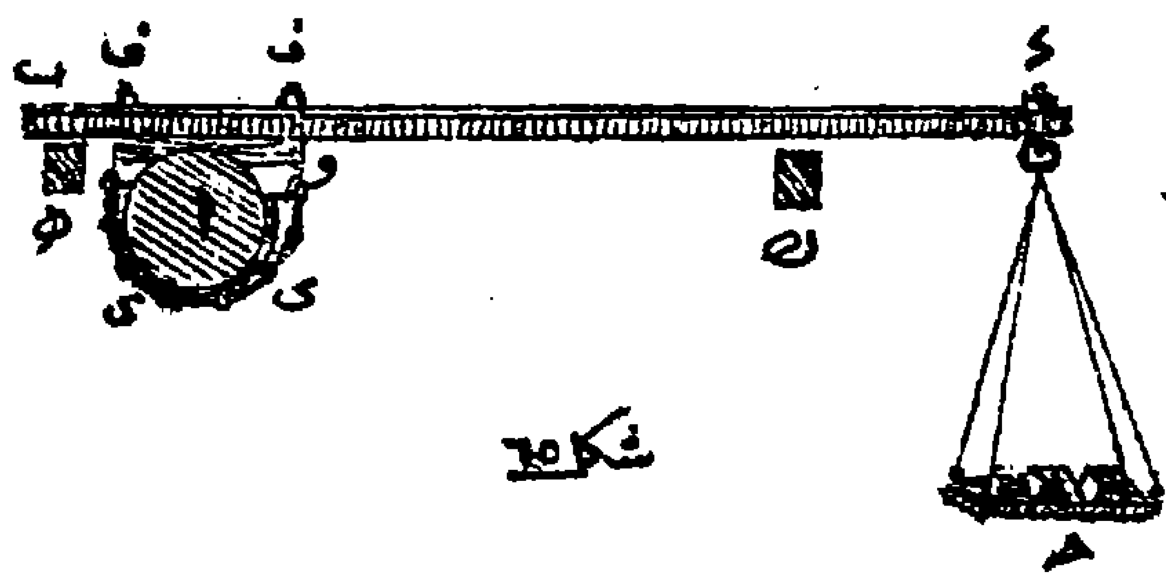
فالاحتكاك هو السبب فى ابطاء سير العربات بواسطة الفرامل التى هى عبارة عن قطع من الخشب يمكن زنقها على العجل بواسطة رافعة ذات برمة ففى بعض الآلات وعلى الخصوص فى العيارات الجبية (أى الونشات) تستعمل فرملة ذات شريط شكل ٦٤ لمنع الأحمال من النزول بسرعة عظيمة

وهى



وهى عبارة عن شريط معدنى ا ب هـ مرتبط برافعة على شكل مخصوص ك و وهـ تسمح بزنق الشريط المذكور بشدة على محيط طارة م مَ

الفرملة الدينامومترية للمعلم برونى — قد استعمل المعلم برونى الاحتكاك بفائدة عظيمة لتقدير شغل محور الحركة فى الآلات المستعملة لادارة ورشة بواسطة آلة مخصوصة منسوبة له عبارة عن فرملة وهى تتركب كما فى شكل ٦٥ من قضيب ك ب ى معلق فى نهايته كفة حـ وهذا القضيب مثبت على محور الحركة ا بواسطة طوق من الخشب و ى ف الذى يمكن زنقه على المحور المذكور بالاختيار بواسطة الصامولتين ف ا فَ وبواسطة المانعين هـ ك يمكن منع الرافعة ب ى من الدوران مع محور الحركة



فلتقدير الشغل بواسطة الآلة المذكورة يمنع اتصال الآلة المحركة بجميع الات الورشة (أى المكنات) ويزنق الطوق و ى ف تدريجيا الى ان تكون سرعة محور الحركة مساوية لسرعة حالة الانتظام ثم يوضع بعد ذلك فى الكفة حـ اثقال الى ان تصير الرافعة افقية وحينئذ فيكون الاحتكاك مبتلعا للشغل الذى كان يلزم ان يؤديه محور الحركة لمكنات الورشة

وعلى هذا اذا رمز لقوة الاحتكاك بالرمز ق ولنصف قطر محور الحركة بالرمز نق ولعدد الدورات فى الثانية بالرمز ن فيكون شغل الاحتكاك مبينا بالمعادلة الآتية

$$ش ق = ق × ٢ ط نق × ن$$

وحيث ان الرافعة افقية فيكون الثقل ث الموضوع فى الكفة متزنا مع قوة الاحتكاك وحينئذ اذا رمز لطول ذراع الرافعة بالرمز ل يكون

$$ق × نق = ث × ل \qquad \text{وعليه يكون}$$

$$ش ق = ث ل × ٢ ط × ن$$

وحيث ان جميع الكميات الداخلة فى الطرف الثانى يمكن تقديرها بالضبط فيتعين مقدار شغل الاحتكاك اى شغل محور الحركة بالضبط كذلك

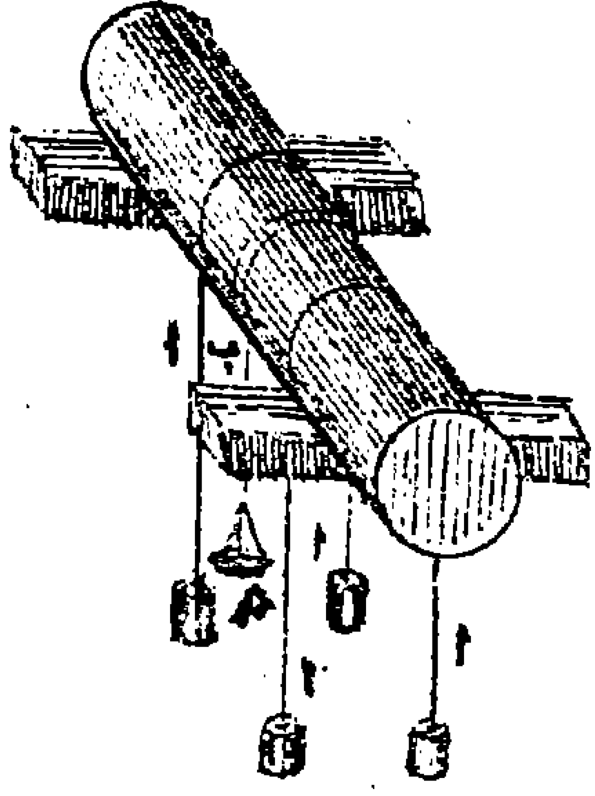
ولأجل قطع النظر عن ثقل الفرملة فى اثناء العمل بها يوضع فى طرفها ب ثقل اتزان بحيث ان الرافعة تكون افقية متى كانت متأثرة بالتثاقل فقط والا يلزم ان يعلق القضيب من نقطة ى فى ديناموتر قبل زنق الفرملة على المحور ويقدر الشغل الذى اذا وضع فى الكفة حـ يحدث تأثيرا مساويا للتأثير

الناتج من ثقل الفرملة ثم يضاف الثقل المقدر المذكور الى الحمل الذى يوضع فى الكفة حـ

مقاومة الاحتكاك فى التدحرج

قد ظهر من التجربة أنه لاجل تدحرج اسطوانة على سطح مستو افقى يلزم وجود قوة معينة ويلزم أيضا قوة لحفظ انتظام الحركة وحينئذ فالسطح المذكور يحدث مقاومة للتدحرج تسمى باحتكاك التدحرج أو باحتكاك من النوع الثانى

الممارسة التجريبية لاحتكاك التدحرج ــ قد عملت هذه التجربة بوضع اسطوانة أو درفيل على مداتين موضوعتين فى استواء واحد افقى بالضبط شكل ٦٦ وهذا الدرفيل يمكن تحميله باثقال متساوية معلقة فى نهايات أحبال موضوعة عليه كى يصير ثقله كبيرا ثم يحصل تحريك الدرفيل المذكور بوضع اثقال فى الكفة حـ المعلقة فى الحبل ب الملتف على الاسطوانة جمله لفات وقد ظهر من تلك التجربة ما يأتى



شكل ٦٦

قوانين احتكاك التدحرج ــ اولا ان المقاومة للتدحرج مناسبة للحمل وثانيا مناسبة عكسا لقطر الاسطوانة أى الدرفيل وحينئذ اذا رمز بالرمز ك للمقاومة للتدحرج وبالرمز ءً لمعامل احتكاك التدحرج وبالرمز ع للحمل وبالرمز ب لقطر الدرفيل يكون

$$ك = ءً \frac{ع}{ب}$$

وقد ظهر ان معاملات الاحتكاك فى التدحرج اصغر كثيرا من معاملات الاحتكاك فى الانزلاق وحينئذ عندما يراد تعويض الانزلاق بالتدحرج تستعمل الدوافيل لتحريك الاثقال عوضا عن زلقها على الأرض وبتعويض الصناديق المجرورة على قاعها بعربات ليستعاض الاحتكاك الانزلاقى للصندوق باحتكاك تدحرجى للعجل على الأرض واحتكاك انزلاقى للمحاور فى عليها رهكذا

(تنبيه) ــ فى حالة التدحرج كما فى حالة الانزلاق يكون الاحتكاك فى مدة الحركة أقل من الاحتكاك فى مبدأ الحركة وبمجرد حصول الحركة فأن معامل الاحتكاك فى مبدا الحركة ينقص دفعة واحدة لاجل ان يكون مقداره مساويا لمقدار الاحتكاك فى مدة الحركة وهاك جدولين مشتملين على معاملات الاحتكاك

معاملات

معاملات الاحتكاك

الاحتكاك فى الانزلاق

جنس السطوح المحتكة	حالة السطوح المحتكه	فى مبدا الحركة: معامل الاحتكاك	فى مبدا الحركة: زاوية الاحتكاك	فى مدة الحركة: معامل الاحتكاك	فى مدة الحركة: زاوية الاحتكاك
بلوط على بلوط	بدون دهان	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'	٠٫٤٨	٢٥° ٣٩'
شرحه	مندى بالماء	٠٫٧١	٣٥° ٢٢'	٠٫٢٥	١٤° ٠٣'
شرحه	الدهان بالصابون الجاف	٠٫٤٤	٢٣° ٤٥'	٠٫١٦	٩° ٠٦'
شرحه	الدهان بالشحم	٠٫١٩	١٠° ٤٦'	٠٫٠٧	٤° ٢٥'
حديد على بلوط	بدون دهان	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'
شرحه	مندى بالماء	٠٫٦٥	٣٣° ٠٢'	٠٫٢٦	١٤° ٣٥'
شرحه	الدهان بالشحم	٠٫١٢	٦° ٥١'	٠٫٠٨	٤° ٤٠'
سير من الجلد على بكره من الزهر	بدون دهان	٠٫٢٨	١٥° ٣٩'	٠٫٥٦	٢٩° ١٥'
شرحه	مندى بالماء	٠٫٣٨	٢٠° ٤٩'	٠٫٣٦	١٩° ٤٨'
معادن على معادن	بدون دهان	٠٫١٩	١٠° ٤٦'	٠٫٢٠	١١° ١٩'
شرحه	الدهان بشحم الخنزير	٠٫١٠	٦° ٠٠'	٠٫٠٩	٤° ٥٠'
شرحه	الدهان بزيت الزيتون	٠٫١٢	٦° ٥١'	٠٫٠٧	٤° ٣٥'

احتكاك الاصابع على ساندها

السطوح المحتكة	حالة السطوح المحتكة	معامل الاحتكاك
زهر على زهر	بدهان دسم	٠٫١٤
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٨
زهر على طوج	بدون دهان	٠٫١٩
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٧
حديد على طوج	بدهان دسم قليلا	٠٫٢٥
شرحه	بدهان دسم ومنديات بالماء	٠٫١٩
شرحه	الدهان بشحم الخنزير العتيق	٠٫٠٩
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٧
شرحه	الدهان بالزيت المتجدد بالاستمرار	٠٫٠٢

الاحتكاك فى التدحرج

تدحرج العربات التى دائر عجلها من حديد على جسور افقية	معامل الاحتكاك
الجسر مفرط جديد	٠٫٠٦٢٤
حالة صيانة الجسر اعتياديه	٠٫٠٤١٤
الجسر مبلط وحالة الصيانة اعتياديه	٠٫٠٢٤٨
الجسر مجر وحالة الصيانة جيدة جدا	٠٫٠١٥٠
سطح الجسر مكون من مدادات من البلوط الخام	٠٫٠١٠٢
التدحرج على اشرطة مبططة من الحديد	٠٫٠٠٢٥
التدحرج على قضبان من الحديد	٠٫٠٠١٢

توازن جسم على مستو مائل باعتبار الاحتكاك

اذا فرض أولا ان الجسم الموضوع على مستو مائل شكل ٦٧ غير متأثر الا بالثقل فمن البديهى ان الحركة تحصل فى هذه الحالة على اتجاه المستقيم الاعظم ميلا للمستوى

وفى هذه الحالة يكون الجسم المفروض منقادا فى اتجاه المستقيم المذكور لتأثير قوتين احداهما ث حا؟ وهى القوة المحركة والأخرى الاحتكاك وهو القوة المقاومة وحيث ان هذا الاحتكاك يناسب بناء على ما تقدم للضغط العمودى ث حتا؟ الواقع على المستوى المائل من الجسم السالف ذكره فاذا رمز بحرف ء لمعامل الاحتكاك الموافق للسطحين المحتكين يكون مقدار الاحتكاك المذكور هو

ء ث حتا؟

شكل ٦٧

وحيث ان الاحتكاك يقاوم الحركة دائما فيرى انه اذا تحرك الجسم يكون تحركه ناشئا عن المحصلة

ث حا؟ ـ ء ث حتا؟

فاذا كان ؟ = ٠ يكون حا؟ = ٠ ، حتا؟ = ١ ولكن حيث أنه بازدياد ؟ يزداد حا؟ وينقص حتا؟ وكان ث ، ء ثابتين فلابد أن يوجد للزاوية ؟ مقدار به يكون

ث حا؟ = ء ث حتا؟ ومنه يحدث

ء = حا؟ / حتا؟ = طا؟ . . . . (١)

وهذه المعادلة تحقق ما تقدم والزاوية التى تحقق هذا الشرط تسمى بزاوية الانزلاق أو بزاوية الاحتكاك كما تقدم

ومن الارتباط (١) ينتج طريقة لتعيين مقادير معاملات احتكاك الأجسام ويكفى لذلك تمييل المستوى الى أن تبتدأ الحركة وتعيين زاوية ؟ وبناء عليه يتعين طا؟ الذى هو مقدار ء ويشاهد من الارتباط السابق أيضا أنه بالنسبة لزاوية الانزلاق يحصل التساوى بين المركبة المحركة ث حا؟ وبين الاحتكاك ء ث حتا؟ ويكون الجسم حينئذ متزنا توازنا غير ثابت أعنى انه يتحرك بأدنى قوة وعندما تزيد زاوية ؟ عن زاوية الانزلاق فالقوة المحركة ث حا؟ تصير اعظم من قوة الاحتكاك وتحصل الحركة حينئذ

ومتى كانت الزاوية ؟ أقل من مقدار زاوية الانزلاق اى زاوية الاحتكاك فالمركبة ث حا؟ تكون أقل من الاحتكاك ء ث حتا؟ وحيث ان الاحتكاك ليس قوة محركة فقط فينتج من ذلك أن الجسم يكون متزنا توازنا ثابتا

وحيث انه من معادلة (١) يرى ان معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الانزلاق فاذا كان مثلا ؟ = ١١ يكون

يكون ء = طا ا° = ١٩٤ ا ر

واذا قطع النظر عن الاحتكاك يحصل على الارتباطات السابقة فى الاستاتيك

وثانيا اذا كان الجسم متأثرا بقوى مختلفة خلاف المثاقل فلاجل ان الجسم المذكور يتبع اتجاه المستقيم الأعظم ميلا فى هذه الحالة يلزم ان محصلة القوى الأخرى توجد فى مستو رأسى مار بالمستقيم المذكور وحينئذ اذا فرض كما فى شكل ٦٧ أن ك هو محصلة القوى المؤثرة على الجسم خلاف ثقله وأن ث هو ثقل الجسم المذكور وأن ـ هى الزاوية التى تصنعها القوة ك مع المستقيم الاعظم ميلا للمستوى وأن ا هى زاوية ميل المستوى على الافق يحلل كل من القوتين ث ، ك الى قوتين اخرتين احداهما موازية للمستوى المائل والأخرى عمودية عليه وحينئذ فمحصلة القوتين الموازيتين للمستوى المائل تكون هى القوة المحركة وهذه المحصلة من بعد ملاحظة أن المركبتين يؤثران فى جهتين متضادتين بناء على شكل ٦٧ السابق يكون مقدارها مساويا الى

ث حا ا ـ ك حا ـ .... (٢)

ومحصلة المركبتين العموديتين على المستوى المذكور تكون هى الضغط الواقع بين السطحين المحتكين ويتولد عنها الاحتكاك وهذه المحصلة من بعد ملاحظة ان المركبتين المذكورتين يؤثران فى جهتين متضادتين تكون مساوية الى

ث حتا ا ـ ك حتا ـ ...... (٣)

وهو مقدار يجب ان يكون دائما موجبا كى يتحرك الجسم المفروض على المستوى المذكور باحتكاك
واذا كان المقدار المذكور معدوما يتحرك الجسم المذكور بالتوازى للمستوى المائل بدون احتكاك
واذا كان ذلك المقدار سالبا فان الجسم يتباعد عن المستوى السالف ذكره

وحيث ان المقدار السابق هو مقدار الضغط العمودى الواقع بين السطحين المحتكين فيكون مقدار الاحتكاك هو

ء (ث حتا ا ـ ك حتا ـ)

وحيث أن الاحتكاك يؤثر دائما فى الجهة المضادة للحركة فينتج من ذلك أنه متى كان ث حا ا > ك حا ـ أعنى متى كان المقدار (٢) موجبا فانه اذا تحرك الجسم ينزل على المستوى المائل ويتحرك عليه كما اذا كان مطلقا بالكلية وغير متأثر الا بالمحصلة الوحيدة

ث حا ا ـ ك حا ـ ـ ء (ث حتا ا ـ ك حتا ـ)

وكذا يقال كما فى الحالة الأولى ان الجسم يتحرك أو يصير فى توازن غير ثابت أو فى توازن ثابت على حسب ما تكون تلك المحصلة موجبة أو معدومة أو سالبة على التناظر

واذا كان ث حا ا < ك حا ـ أعنى متى كان مقدار (٢) سالبا فانه اذا تحرك الجسم يصعد على المستوى المائل المذكور ويتحرك عليه كما اذا كان متأثرا بالقوة الوحيدة

ك جا ى - ث جا ا - ء (ث جا ا - ك جا ى)

وكما في الحالة السابقة فأن الجسم يتحرك صاعدا على المستوى أو يصير في توازن غير ثابت أو في توازن ثابت على حسب ما تكون تلك المحصلة موجبة أو معدومة أو سالبة على التناظر ومهما كان اتجاه القوة ك حول نقطة م أعنى مهما كان مقدار زاوية ى فتتعين شروط الحركة أو التوازن كما ذكر

فاذا أثرت القوة ك على يمين ح ع فأن ارتباط (٢) يبقى بعينه وأما اذا اثرت على يسار ح ع المذكور فمركبتها ك جا ى تنضم على المركبة ث جا ا ويؤول الارتباط المذكور الى

ث جا ا + ك جا ى

، ى هي دائما أصغر الزوايا التي تكونها القوة ك مع المستوى المذكور

واذا اثرت القوة ك أعلى المستوى فأن ارتباط (٣) يبقى بعينه واذا اثرت أسفله فان المركبة ك جا ى تنضم على ث جا ا ويؤول ارتباط (٣) المذكور الى

ث جا ا + ك جا ى

حركة جسم منزلق على مستوى مائل — حيث انه بناء على ما ذكر يمكن ان نؤول جميع القوى الثابتة المؤثرة على المتحرك الى قوة واحدة ثابتة متجهة في اتجاه المستقيم الاعظم ميلا للمستوى فالمتحرك يتحرك في اتجاه ذلك المستقيم بحركة منتظمة العجلة وحينئذ اذا اقسمت القوة الوحيدة ف المؤثرة على المتحرك على الجسم م = ث/ك للمتحرك المذكور فأنه يحصل على العجلة و بناء على ما تقدم ومتى علمت تلك العجلة فأنه يمكن معرفة مقدار السرعة المكتسبة في نهاية الزمن ن وهو و ن ثم المسافة ه المقطوعة في نهاية الزمن المذكور وهي ½ و ن²

واذا فرض أن ف = ٢٠ كيلوجراما ، ث = ١٠٠ كيلوجراما ، ن = ١٠ ثانية فأنه يكون

م = ث/ك = ١٠٠/٩٫٧٩ = ١٠٠ × ٠٫١٠٢ = ١٠٫٢ ،

و = ف/م = ٢٠/١٠٫٢ = ١٫٩٦ متر ،

ع = و ن = ١٫٩٦ × ١٠ = ١٩٫٦ متر ،

ه = ½ و ن² = (١٫٩٦ × ١٠٠)/٢ = ٩٨٫٠٠ متر

المتحرك على مستوى مائل أملس — اذا فرض ان المتحرك ليس متأثرا الا بثقله الخاص وينزلق بدون احتكاك على المستوى المائل يقال

أنه في هذه الحالة حيث ان القوة الوحيدة التي تحدث الحركة هي عبارة عن المركبة ث جا ا للثقل ث بالتوازي للمستوى فعجلة المتحرك تكون بناء على ما تقدم هي

و = ث جا ا / م = ث جا ا / (ث/ك) = ء جا ا

وحينئذ

وحينئذ فالسرعة المكتسبة فى نهاية الزمن ز تكون هى

$$\text{ع} = \text{ح جا ا} \times \text{ز} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

ثم ان المسافة المقطوعة فى نهاية الزمن ز المذكور تكون هى

$$\text{ه} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح جا ا} \times \text{ز}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

فاذا كان ه عبارة عن الطول الكلى ل للمستوى وكان ز هو الزمن الذى فيه ينزل المتحرك من رأس المستوى المذكور لغاية نهايته السفلى ده فانه يكون

$$\text{ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح جا ا} \times \text{ز}^2$$ ومنها يحدث

$$\text{ز} = \sqrt{\frac{2\,\text{ل}}{\text{ح جا ا}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

واذا وضع مقدار ز هذا عوضاً عنه فى معادلة السرعة فانه يحدث

$$\text{ع} = \text{ح جا ا} \times \sqrt{\frac{2\,\text{ل}}{\text{ح جا ا}}} = \sqrt{2\,\text{ح ل جا ا}}$$

وبملاحظة أن ل جا ا عبارة عن الارتفاع ر للمستوى المائل يكون

$$\text{ع} = \sqrt{2\,\text{ح ر}}$$

وحينئذ فالسرعة التى يكتسبها المتحرك عند مجيئه فى نهاية المستوى من أسفل تكون مساوية للسرعة التى يكتسبها عند سقوطه رأسيا من الارتفاع ر بتأثير التثاقل فقط

وما قيل على الطول الكلى للمستوى المائل يمكن ان يقال على جزء حيثما اتفق لَ من طوله وعليه فاذا قطع المتحرك الطول لَ يكون

$$\text{عَ} = \sqrt{2\,\text{ح رَ}}$$

اعنى أنه متى قطع المتحرك مسافة حيثما اتفق على طول المستوى المائل فانه يكتسب سرعة قدرها عَ مساوية للسرعة التى يكتسبها لو سقط بالحرية من الارتفاع الرأسى رَ الذى نزل منه على المستوى المائل المذكور

وحيث ان مقدار السرعة ع غير متعلق بمقدار طول المستوى ل فيعلم من ذلك حينئذ أن المتحركات التى تخرج جميعا بدون سرعة ابتدائية من نقطة واحدة يكون لها سرعة واحدة عند مجيئها فى مستو واحد افقى مهما كانت ميول المستويات التى تتحرك عليها تلك المتحركات

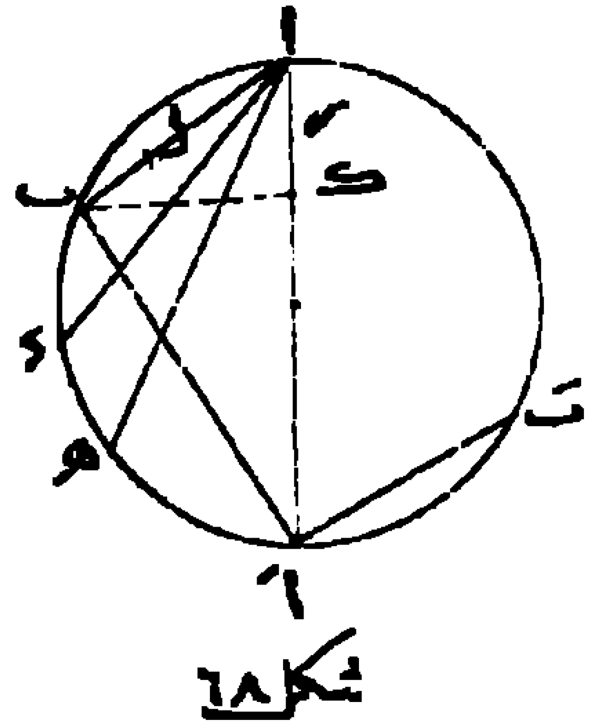
وان كانت السرعة المكتسبة غير متعلقة بميل المستوى ولا بطوله لكن الزمن الذى تستغرقه تلك المتحركات لوصولها الى المستوى الافقى السالف ذكره ليس كذلك كما يتضح ذلك من قانون (٣)

واذا كان للمتحرك سرعة ابتدائية رمزها عَ فتلك السرعة تدخل فى قانونى (١) (٢) مثل القوانين العمومية السابقة ويحصل حينئذ بناء على القانونين الجديدين (١) (٣) على مقدار السرعة المكتسبة بعد مسافة حيثما اتفق لَ كما تقدم

تنبيه ـ حيث ان مدة النزول على مستوى مائل هى

$$ن = \sqrt{\frac{٢ل}{ج جا م}} = \sqrt{\frac{٢ل ك}{ج ل جا م}} = \sqrt{\frac{٢}{ج} \times \frac{ل ك}{م}}$$

فيشاهد من ذلك ان الزمن ن يكون واحدا لجميع المستويات المائلة التى فيها $\frac{ل ك}{م}$ كمية ثابتة وهذا يحصل بالنسبة لجميع المستويات التى اطوالها ل وميولها عبارة عن ميول الاوتار ا ب ، ا ح ، ا هـ ، اَ ت ، اَ ءَ ، اَ هـَ .... (شكل ٦٨) لكرة أو لدائرة المنتهى

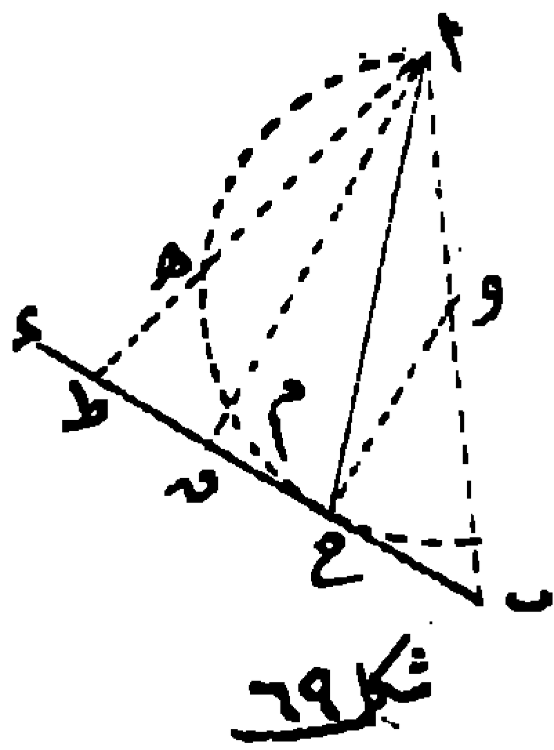

شكل ٦٨

جميعها بنهايتى قطر واحد رأسى ا اَ لانه اذا انزل من نقطة حيثما اتفق ب من محيط الدائرة عمود ب ك على قطر ا اَ = ٢ نق فانه يحدث

ل = م × ٢ نق ومنها يحدث $\frac{ل ك}{م}$ = ٢ نق

وهو كمية ثابتة وهو المطلوب

مسئلة — المعلوم مستوى مثل ب ء (شكل ٦٩) والمطلوب تعيين ميل المستوى الذى يقطعه المتحرك الخارج من نقطة ا بدون سرعة ابتدائية ويأتى فى مستوى ب ء فى زمن اصغر ما يكن لذلك يكفى تعيين المستقيم الأعظم ميلا للمستوى المطلوب ولاجل ذلك نمد المستقيم الرأسى ا ب وننزل العمود ا هـ على ب ء فالمستقيم ا ع المنصف لزاوية ب ا هـ يكون هو المستقيم الأعظم ميلا المطلوب


شكل ٦٩

لأنه اذا مد ع و موازيا للمستقيم ا هـ أعنى عمودا على ب ء ثم جعلت نقطة و مركزا وبنصف قطر و ع ورسم نصف محيط دائرة فأنه يمر بنقطة ا حيث ان كلا من الزاويتين ا ع و ، ع ا و تساوى لزاوية ع ا هـ وبناء عليه فيكون المثلث ا ع و متساوى الساقين أعنى يكون و ع = و ا اذا تقرر هذا فجميع الاوتار الممتدة من نقطة ا فى نصف المحيط المذكور يقطعها المتحرك فى زمن مساو للزمن المستعمل لقطع الوتر ا ع بناء على التنبيه السابق ولكن حيث ان المستوى ب ء مماس لنصف المحيط السالف ذكره فى نقطة ع فكل نقطة أخرى خلاف نقطة ع تكون خارجة عنه وبناء عليه فالمتحرك لايمكنه ان يصل الى النقطة الخارجة عن نصف المحيط المذكور الا فى ازمنة اكبر من الزمن الذى يستعمله لقطع الوتر ا ع وهو المطلوب

فى مقاومة الأوساط

اعلم ان الجسم الذى يتحرك فى الماء مثلا يكابد مقاومة من قبل الوسط المتنقل فيه وحينئذ فيصرف من الشغل المحرك ما يلزم لتحريك عناصر الوسط المذكور

ومقاومة الأوساط تختلف عن الاحتكاك حيث انها تزداد تبعا للسرعة ولاتساع الجسم المتحرك وهى مناسبة الى ما يأتى

أولا الى كثافة المائع

وثانيا الى القطاع الأكبر للجسم المأخوذ عموديا على اتجاه الحركة

وثالثا الى مربع السرعة

وقد ينتفع بمقاومة الاواسط في الطبيعة فانه لولا مقاومة الهواء لما طارت الطيور في الجو ولما انتظمت اصوات دقاقات الساعات الدقاقة وسرعة اسطوانة جهاز موران السابق الكلام عليه فيما تقدم ولولا مقاومة الماء لما امكن عوم السمك والمراكب في البحار وهكذا

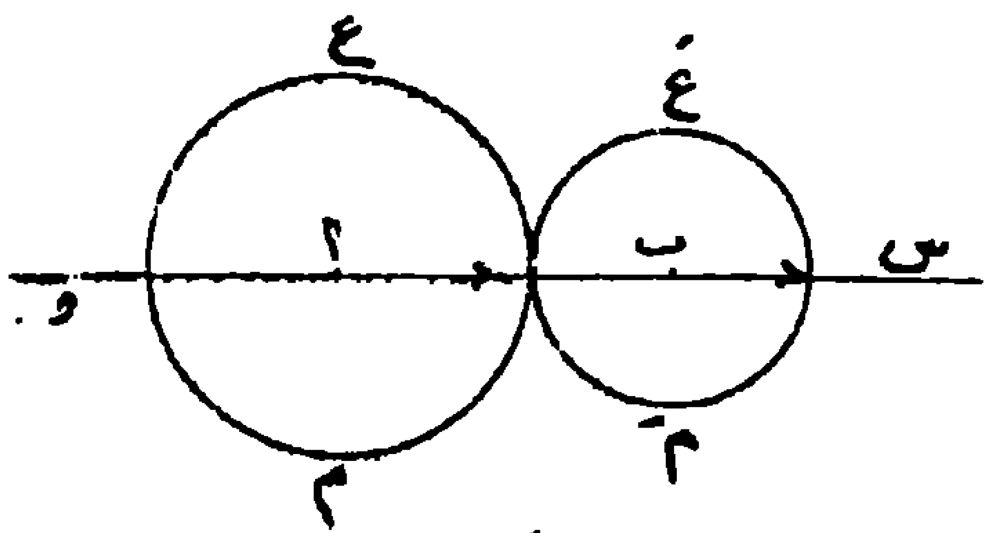
في التصادم

عند البحث في تأثيرات التصادم نفرض أن الأجسام المتصادمة كروية الشكل وتامة الملاسة ومتجانسة بحيث تكون مراكز ثقلها منطبقة على مراكزها الهندسية

معامل المرونة — اعلم ان جميع الأجسام المعلومة لنا قابلة للانضغاط كثيرا أو قليلا وتميل بدرجات مختلفة للرجوع الى شكلها الأصلي متى زالت القوى الضاغطة عليها وهذه الخاصية هي المسماة بالمرونة والقوة الداخلية التي يبذلها الجسم ليعود الى شكله الأصلي تسمى قوة الرد أى رد الفعل

وقد علم من التجربة ان نسبة قوة رد الفعل الى قوة الضغط نفسها تكون ثابتة بالنسبة للمادة الواحدة مهما كانت مقادير قوى الضغط الا انها تختلف باختلاف المواد وهذه النسبة يمكن اعتبارها مقياسا لمرونة المادة ولذا تسمى غالبا معامل المرونة

وهذا المعامل لا يمكن في حال من الأحوال ان يكون اكبر من الواحد والمواد التي فيها المعامل المذكور مساو للواحد تسمى اجساما تامة المرونة والاجسام الاخرى تسمى غير تامة المرونة وكلما كان معامل المرونة اكبر كان الجسم المطابق له اكثر مرونة ويمكن أن يقال انه لا يوجد جسم تام المرونة مطلقا ففي الكرات الصلب يكون معامل المرونة $\frac{5}{9}$ وفي الكرات الزجاج يكون المعامل المذكور $\frac{15}{16}$



شكل ٧٠

تعريف — الخط الواصل بين مراكز الكرات المتصادمة في لحظة التصادم يسمى خط التصادم ويسمى التصادم مستقيما حينما تكون المراكز متحركة في اتجاه خط التصادم وفي الاحوال الأخرى يسمى التصادم مائلا فاذا صدمت كرة مثل ا كرة أخرى مثل ب شكل ٧٠ تصادما مستقيما فأن تأثير الضغط المشترك بينهما ينشأ عنه زيادة سرعة كرة ب ونقص سرعة كرة ا الى ان تتساوى السرعتان وحينئذ ينعدم الضغط المشترك بينهما فاذا كانت الكرتان غير مرنتين فانهما تتحركان باستمرار بالسرعة التي وصلتا اليها بعد التصادم

وشدة هذا الضغط المشترك تتغير في اثناء الزمن الصغير الذى تضغط فيه الكرتان بعضهما بعضا الا انه بالنسبة لتأثيره الذى ينشأ عنه كمية التحرك يعتبر له مقدار متوسط ثابت

ويمكن تقدير مقدار التصادم بكمية التحرك س التى يكتسبها أحد الجسمين ب ويفقدها الآخر ا

مع ملاحظة ان هذين التأثيرين على الكرتين المذكورتين يكونان متساويين في المقدار ومختلفين في الجهة

فاذا كانت الكرتان مرنتين فأن الضغط المشترك بينهما يستمر زمنا بعد تساوي سرعتيهما بسبب ميلهما للرجوع الى شكليهما الأصليين وكمية التحرك التي تكتسبها احد الكرتين وتفقدها الأخرى بعد ذلك التي نرمز اليها بالرمز سَ تكون نسبتها الى كمية التحرك س الحادثة في المدة الأولى من التصادم كنسبة (ى ÷ ١) وهذه النسبة تتعلق بمرونة مادتي الكرتين اعني ان ى رمز لعامل المرونة وعليه يكون

$$\text{سَ} = \text{ى س}$$

وحينئذ فجميع كميات التحرك التي تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ا تكون مساوية الى

$$\text{س} + \text{سَ} = (1 + \text{ى})\,\text{س}$$

ولا يخفى ان الزمن الحاصلة فيه حادثة التصادم صغير جدا لا يمكن تقديره الآن الا ان الايضاح الذي ذكرناه كاف لتصوره وارتقاء الفكر الى فهم معنى ان التصادم يحصل في زمن صغير جدا

التصادم المستقيم — اذا كانت كرتان غير مرنتين متحركتين بسرعتين معينتين وتصادمتا تصادما مستقيما واريد ايجاد سرعة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض ان ع ، عَ هما سرعتا الكرتين ا ، ب (شكل ٧٠) على التناظر قبل التصادم وان حركتيهما حاصلتان في الاتجاهين المبينين بالسهمين

وحيث كانت الكرتان غير مرنتين فانهما يتحركان في جهة واحدة بعد التصادم بسرعة مشتركة رمزها ع̣ فاذا رمز بالرمز س لكمية التحرك التي تفقدها الكرة ا وتكتسبها الكرة ب في مدة التصادم ورمزنا ايضا لجسمي الكرتين ا ، ب بالرمزين م ، مَ على التناظر يكون تحرك الكرة ا بعد التصادم = كمية تحركها قبل التصادم ناقصا س اعني يكون

$$\text{م ع̣} = \text{م ع} - \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots (1) \quad \text{وبالمثل يكون}$$

$$\text{مَ ع̣} = \text{مَ عَ} + \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots (2) \quad \text{وبالجمع يحدث}$$

$$(\text{م} + \text{مَ})\,\text{ع̣} = \text{م ع} + \text{مَ عَ} \quad \ldots\ldots (3) \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{ع̣} = \frac{\text{م ع} + \text{مَ عَ}}{\text{م} + \text{مَ}} \quad \ldots\ldots (4)$$

واذا وضع عوضا عن ع̣ مقدارها في معادلة (١) وهي

$$\text{س} = \text{م}\,(\text{ع} - \text{ع̣}) \quad \text{يحدث}$$

$$\text{س} = \text{م}\left(\text{ع} - \frac{\text{م ع} + \text{مَ عَ}}{\text{م} + \text{مَ}}\right) = \frac{\text{م مَ}\,(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}} \quad \ldots\ldots (5)$$

فمن معادلة (٤) تتعين السرعة المشتركة ع̣ لكل من الكرتين بعد التصادم ومن معادلة (٥) تتعين كمية التحرك س التي تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ا

وينتج من ذلك اولا انه من معادلة (٣) يرى ان مجموع كميتي تحرك الكرتين بعد التصادم مساو لمجموع كميتي

كميتى التحرك قبل التصادم

وثانيا بناء على معادلات (١)، (٢)، (٥) يمكن ان يوضع

السرعة التى تفقدها ا $= ع - ع_1 = \frac{س}{م} = \frac{مَ(ع - عَ)}{م + مَ}$

والسرعة التى تكتسبها ب $= عَ_1 - عَ = \frac{س}{مَ} = \frac{م(ع - عَ)}{م + مَ}$

وهذا الوضع مفيد احياناً

تنبيها - اذا كانت كرة ب متحركة فى جهة مضادة لجهة حركة ا قبل التصادم فانه يلزم تغيير اشارة عَ فى المعادلات السابقة وبعبارة اخرى يمكن اعتبار ع، عَ هما سرعتا ا، ب جبريا على التناظر وتعتبر اشارتها فى كل حالة من الاحوال حسب اتجاه التحرك الحقيقى ويجب ملاحظة ذلك فيما سيأتى

وثالثا اذا تصادمت الكرة ا مع الكرة ب وهى ساكنة فيكفى ان يوضع فى المعادلات السابقة عَ = ٠

فاذا كانت الكرتان ا، ب المذكورتان (شكل ٧) غير تامتى المرونة واريد ايجاد سرعة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض ان ع، ع١ سرعتا ا قبل التصادم وبعده وان عَ، عَ١ سرعتا ب قبل التصادم وبعده أيضا ونفرض ان الكرة ا هى التى تصدم كرة ب ونرمز بالرمز س لكمية التحرك التى تفقدها الاولى وتكتسبها الثانية فى المدة الاولى من التصادم اى قبل تساوى سرعتى الكرتين بسبب الانضغاط ثم نرمز بالرمز سَ لكمية التحرك الناتجة من رد الفعل بعد تساوى سرعتى الكرتين الذى يحدث انفصال الكرتين المذكورتين عن بعضهما

وحينئذ من بعد ملاحظة ان معامل المرونة هو ى فبموجب ما تقدم يكون

$$سَ = ى س$$ ويكون

$س + سَ = (١ + ى) س$ هو كمية التحرك الكلية التى تفقدها ا وتكتسبها ب وحينئذ يكون

$$\left\{\begin{array}{l} م\, ع_1 = م\, ع - (١ + ى) س \\ مَ\, عَ_1 = مَ\, عَ + (١ + ى) س \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (١)$$

وحيث ان س هى كمية التحرك الناتجة من تضاغط الكرتين قبل ابتداء قوة مرونتهما فى التأثير فيكون مقدارها كما لو كانت الكرتان غير مرنتين وحينئذ بموجب ما تقدم يكون

$$س = \frac{م\, مَ\, (ع - عَ)}{م + مَ}$$

واذا وضع عوضا عن س مقدارها فى معادلتى (١) يحدث

$$\left\{\begin{array}{l} ع_1 = ع - (١ + ى) \frac{س}{م} = ع - (١ + ى) \frac{مَ(ع - عَ)}{م + مَ} \\ عَ_1 = عَ + (١ + ى) \frac{س}{مَ} = عَ + (١ + ى) \frac{م(ع - عَ)}{م + مَ} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (٢)$$

ومن هاتين المعادلتين يمكن تعيين سرعتى ا ، ب بعد التصادم
وينتج من ذلك اولاً أنه بجمع معادلتى (١) الى بعضهما طرفاً بطرف يحدث

$$\text{م}\,\text{ع}_1 + \text{م}'\,\text{ع}'_1 = \text{م}\,\text{ع} + \text{م}'\,\text{ع}'$$

أعنى ان مجموع كمية التحرك بعد التصادم لا يتغير بتأثير التصادم
وثانيا يمكن وضع معادلتى (٢) بالصورة الآتية

$$\left.\begin{array}{l} \text{السرعة التى تفقدها ا} = \text{ع} - \text{ع}_1 = [1+\text{ى}]\,\dfrac{\text{م}'(\text{ع}-\text{ع}')}{\text{م}+\text{م}'} \\ \text{والسرعة التى تكتسبها ب} = \text{ع}'_1 - \text{ع}' = (1+\text{ى})\,\dfrac{\text{م}(\text{ع}-\text{ع}')}{\text{م}+\text{م}'} \end{array}\right\} \ldots\ldots (٣)$$

وكذا بطرح معادلتى (٢) من بعضهما يحدث

$$\text{ع}'_1 - \text{ع}_1 = \text{ع}' - \text{ع} + (1+\text{ى})(\text{ع}-\text{ع}') = \text{ى}(\text{ع}-\text{ع}') \ldots [٤]$$

ومن هذه المعادلة يكون

$$\frac{\text{ع}'_1 - \text{ع}_1}{\text{ع} - \text{ع}'} = \frac{\text{ى}}{1}$$

اعنى ان النسبة بين السرعتين النسبيتين للكرتين بعد التصادم وقبله كالنسبة بين معامل المرونة والوحدة
وثالثاً اذا صدمت الكرة ا كرة ب وهى ساكنة فيكفى ان يوضع فى المعادلات السابقة $\text{ع}' = ٠$.
وقد حل مسالة التصادم المستقيم المذكور لكرتين غير تامتى المرونة على اعتبار اولاً أن مجموع كمية التحرك بعد التصادم وقبل التصادم واحد وذلك بناء على ان الفعل ورد الفعل متساويان فى المقدار ومختلفان فى الجهة
وثانيا ان النسبة بين السرعتين النسبيتين للكرتين بعد التصادم وقبله ثابتة وهى كنسبة ى : ١
، ى هو معامل المرونة وذلك بناء على ما حققته التجربة
فعلى هذين الاعتبارين واتباع الرموز السابقة يكون

$$\left\{\begin{array}{l} \text{م}\,\text{ع}_1 + \text{م}'\,\text{ع}'_1 = \text{م}\,\text{ع} + \text{م}'\,\text{ع}' \\ \text{ع}'_1 - \text{ع}_1 = \text{ى}(\text{ع}-\text{ع}') \end{array}\right.$$

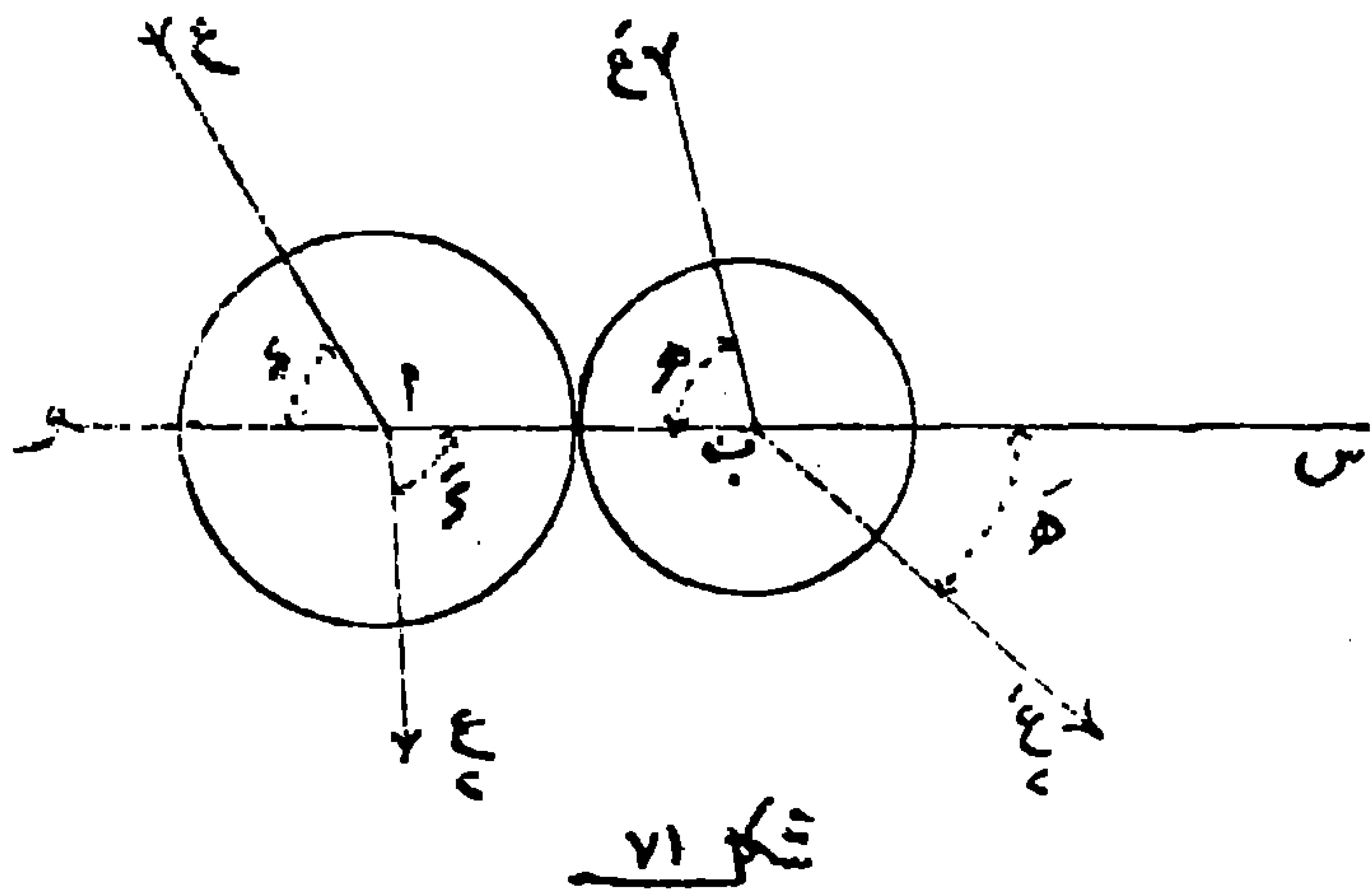
ومن هاتين المعادلتين نحصل معادلتا (٢) السابقة أو نحصل على مقدارى ع_1 ، $\text{ع}'_1$ كما هو آت

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ع}_1 = \dfrac{\text{م}\,\text{ع} + \text{م}'\,\text{ع}'}{\text{م}+\text{م}'} - \text{ى} \times \dfrac{\text{م}'(\text{ع}-\text{ع}')}{\text{م}+\text{م}'} \\ \text{ع}'_1 = \dfrac{\text{م}\,\text{ع} + \text{م}'\,\text{ع}'}{\text{م}+\text{م}'} + \text{ى} \times \dfrac{\text{م}(\text{ع}-\text{ع}')}{\text{م}+\text{م}'} \end{array}\right.$$

تنبيه ـ الأصوب اتباع حل المسالة المذكورة بالطريقة السابقة التى وجدت بحسبها المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) حيث انها مؤسسة على قواعد سهلة الفهم وبسيطة
التصادم المائل ـ اذا كانت كرتان ناعمتان غير تامتى المرونة متحركتين فى مستو واحد بسرعتين معينتين وفى اتجاهين معينين وتصادمتا تصادما مائلا واريد ايجاد حركة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض

نفرض ان وس شكل ٧١ هو المستقيم المار بمركزى الكرتين وقت التصادم وان الأسهم الموضحة فى الشكل دالة على الاتجاهات التى تتحرك عليها الكرتان قبل التصادم وبعده



ثم نفرض أن ع ، عَ هما سرعتا الكرة ١ قبل التصادم وبعده فى اتجاهين صانعين زاويتى ى ، ىَ مع الخط وس وأن عَ ، عً ، هـ ، هَ هى الكميات المماثلة للكميات السابقة بالنسبة للكرة ب

ومن حيث ان الكرتين ناعمتان فالضغط المشترك لهما يحصل فى اتجاه وس وحينئذ فتقدر سرعتا الكرتين المذكورتين فى اتجاه وس وفى الاتجاه العمودى عليه ثم يبحث عن تحرك الكرتين كل على حدته

وحينئذ يقال حيث انه لا توجد قوى مؤثرة على الكرتين فى اتجاه عمودى على وس فان سرع هاتين الكرتين على الاتجاه المذكور لا تتغير بتأثير التصادم ويكون

ع حا ىَ = ع حا ى .... (١) ،

عً حا هَ = عَ حا هـ .... (٢)

وكذا حيث ان تأثير التصادم على محللات السرع فى اتجاه وس يكون حاصلا كما لو كانت هذه المحللات موجودة بنفسها فتكون

ع حتا ى ، ع حتا ىَ } ، عَ حتا هـ ، عً حتا هَ } هى محللات السرع ١ ، ب على اتجاه وس { قبل وبعد } التصادم

فاذا كان س رمزا لكمية الحركة الكلية التى تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ١ وقت التصادم فبموجب ما تقدم يكون

$$س = \frac{(١ + ى) م مَ (ع حتا ى - عَ حتا هـ)}{م + مَ}$$

ويكون أيضا

ع حتا ىَ = ع حتا ى - (١+ى) $\frac{مَ}{م + مَ}$ (ع حتا ى - عَ حتا هـ) .... (٣) ،

عً حتا هَ = عَ حتا هـ + (١+ى) $\frac{م}{م + مَ}$ (ع حتا ى - عَ حتا هـ) .... (٤)

فالمعادلتان (١) ، (٣) تكفيان لتعيين ع ، ىَ والمعادلتان (٢) ، (٤) تكفيان لتعيين عً ، هَ وهذه الاربع مقادير تكفى لتعيين سرعتى الكرتين بعد التصادم مقدارا واتجاها

تنبيه — ما ذكر بخصوص التصادم المائل يدل بوجه العموم على حل مسألة تصادم كرتين متحركتين فى مستو واحد ويمكن استخراج كل حالة خصوصية منها باعطاء الرموز مقاديرها الخاصة بها دائما

نلاحظ هنا الحالة المهمة الآتية وهى

انه اذا اصدمت كرة ا بالميل كرة ب الساكنة والكبيرة جدا يكون

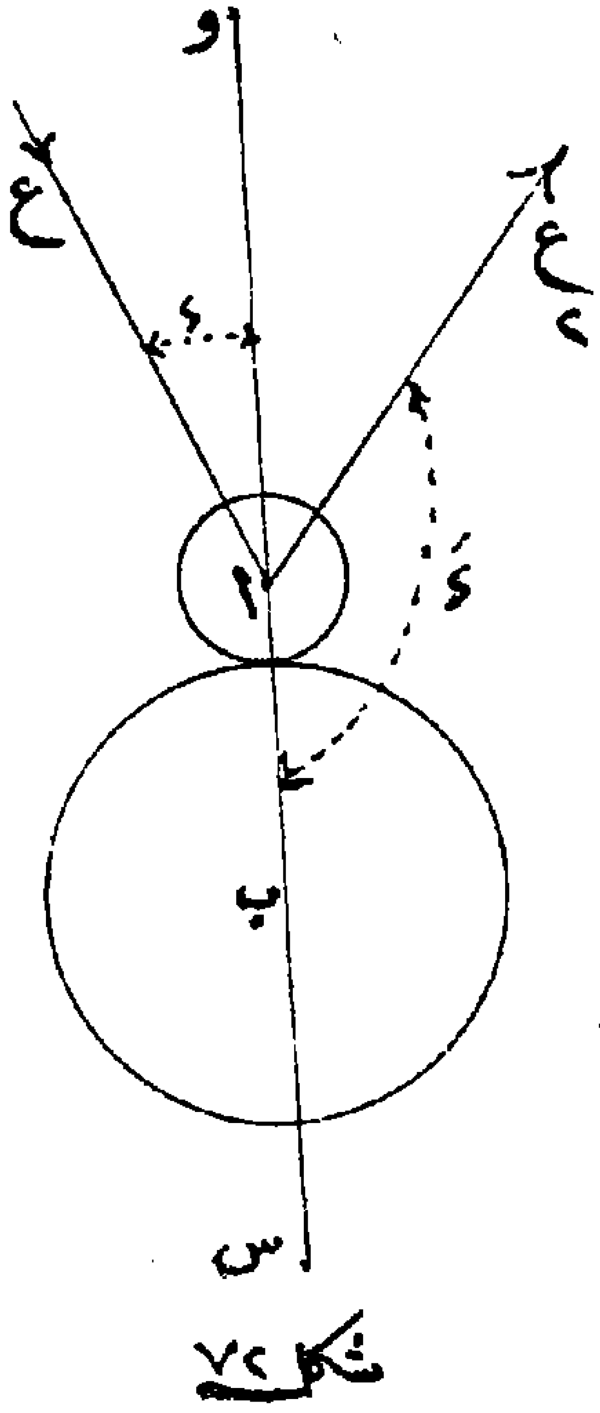
$$\text{ع} = \cdot \quad ، \quad \frac{\text{م}}{\text{م} + \text{مَ}} = \cdot \quad ، \quad \frac{\text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ}} = ١ \quad \text{تقريبا ويكون}$$

ع٢ جا ىَ = ع جا ى
ع٢ جتا ىَ = − ى ع جتا ى } ومن هاتين المعادلتين تستخرج ع٢ ، ىَ
عَ٢ = ٠ تقريبا

ويرى من ذلك ان كمية التحرك التى نقلت الى ب غير محسوسة وحيث ان ظتا ىَ = − ى ظتا ى فيلزم ان يكون ىَ > ٩٠°

وحينئذ فكرة ا تنعكس بعد التصادم كما فى شكل ٧٢

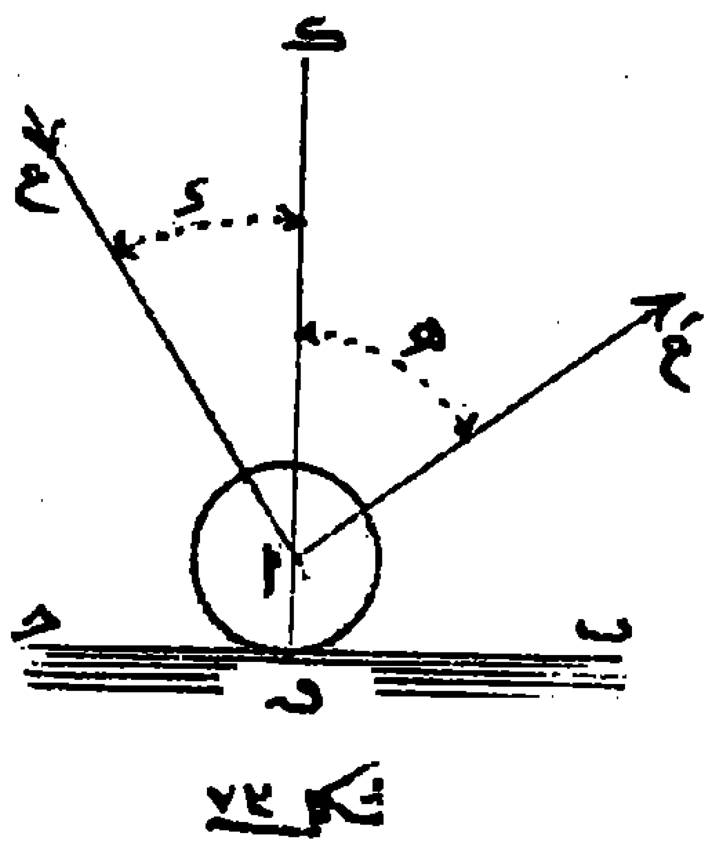
وحالة تصادم كرة بمستو ثابت هى حالة من هذا القبيل وكذلك اذا اصدمت الأرض كرة فمن حيث ان جسم الأرض كبير جدا بالنسبة لجسم الكرة فأن كمية التحرك التى تكتسبها الأرض من الكرة المذكورة تكون غير محسوسة



شكل ٧٢

ملحوظة – اذا تصادمت كرتان ولم تتحركا فى مستو واحد فلأجل ايجاد حركة كل من الكرتين بعد التصادم يلزم استعمال الطرق التى استعملناها فى حالة التصادم المائل السابق ذكره اى اننا نحلل سرعتى كل من الكرتين على اتجاهى خط التصادم والخط العمودى عليه وحينئذ فالمحللات العمودية للسرع لا تتأثر بالتصادم واما محللات السرع فى اتجاه خط التصادم فتتغير كما لو كانت موجودة بنفسها اماما دلات الحل العمومى لهذه المسألة فتتوقف على اصول الهندسة التحليلية ذات الثلاثة ابعاد ولا لزوم لذكرها هنا

التصادم على مستو – اذا اصدمت كرة مثل ا شكل ٧٣ مستويا ناعما مثل ب حـ بالميل واريد ايجاد حركة الكرة المذكورة بعد التصادم يقال



شكل ٧٣

ليكن د ى رأسى المستوى المذكور فى نقطة تماسه بالكرة ا وقت الانصدام ولنفرض ان ذلك الرأسى موجود فى مستوى الشكل وان المستقيم المتحركة عليه الكرة ا قبل التصادم فى مستوى الشكل ايضا وأن هذا المستوى يقطع المستوى المفروض فى المستقيم حـ د ب وحينئذ فخط حركة الكرة ا بعد التصادم يكون فى نفس مستوى الشكل حيث انه لا تؤثر قوة ما على الكرة اثناء التصادم فى اتجاه عمودى على هذا المستوى

ولكن

ولیکن ع ، عَ سرعتی الکرة ا قبل التصادم وبعده ، ى ، هـ زاویتی میلها علی الخط الرأسی د ك ، م مجسم الکرة المذکورة ، ى معامل المرونة ، س کمیة التحرك المفقودة بسبب الانضغاط فی المدة الأولی من التصادم

فمن حیث ان السرعة الموازیة الی حـ ب غیر متأثرة بالتصادم یکون

$$عَ حا هـ = ع حا ى \; .... \; (١)$$

وحیث ان کمیة تحرك الکرة ا علی الخط الرأسی ك د معدومة بتمامها بمقاومة المستوى فیکون

$$س = م ع حتا ى$$

، ى س الذی هو مقدار کمیة التحرك المکتسبة من الاتجاه المضاد بسبب المرونة أو قوة رد الفعل یکون مقداره هو

$$ى س = م عَ حتا هـ \qquad \text{واذن یکون}$$

$$عَ حتا هـ = ى ع حتا ى \; .... \; (٢)$$

ومن معادلتی (١) ، (٢) یحدث

$$\left.\begin{array}{l} ظتا هـ = ى ظتا ى \\ عَ = ع \sqrt{حا^{٢} ى + ى^{٢} حتا^{٢} ى} \end{array}\right\} \; ...... \; (٣)$$

ومن معادلتی (٣) یتعین مقدار السرعة واتجاهها بعد الانصدام

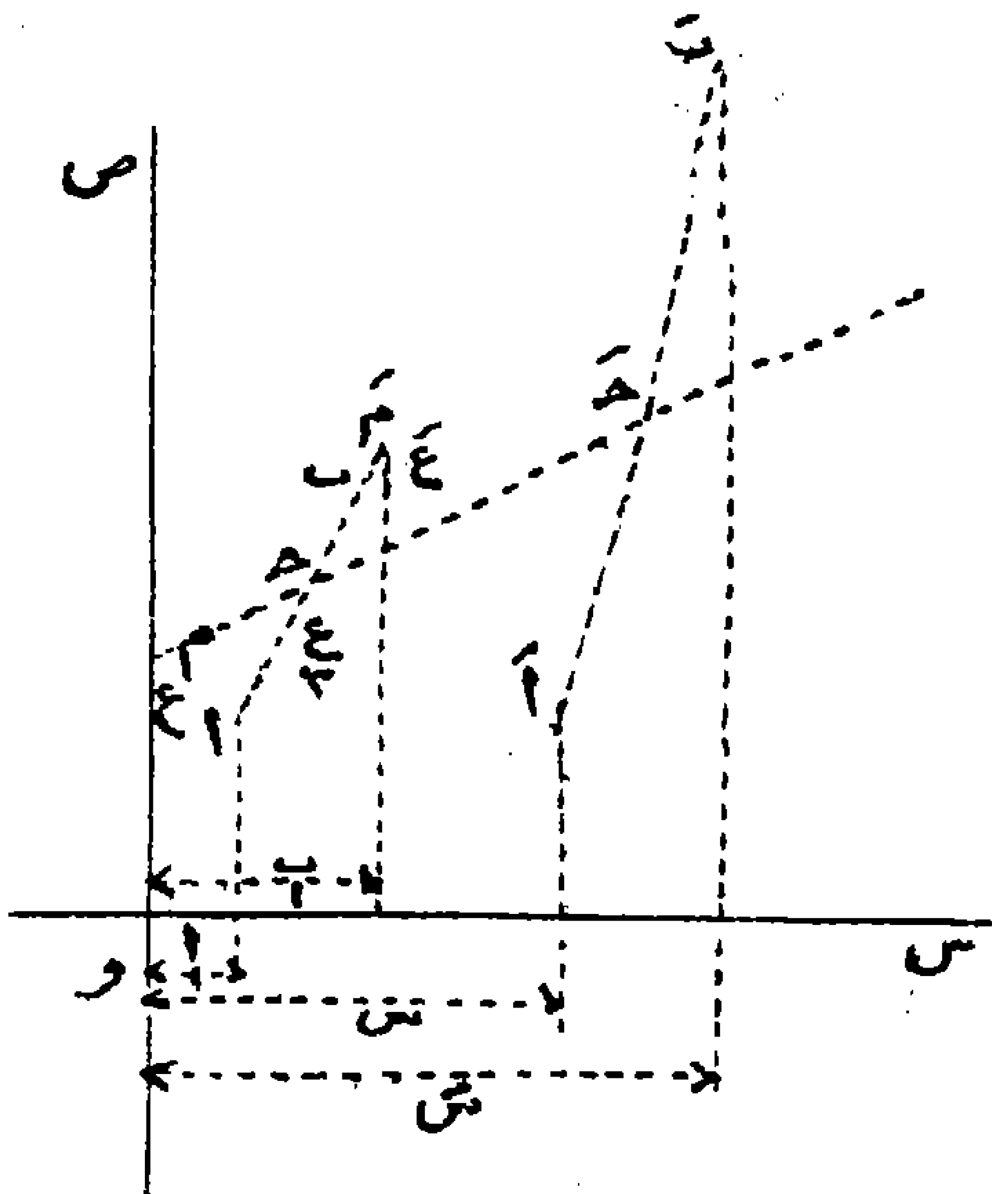
وینتج من ذلك اولا انه اذا کانت الکرة غیر مرنة یکون ى = ٠ ، هـ = ٩٠° ، عَ = ع حا ى

أعنی انه اذا اصدمت کرة غیر مرنة مستویا ثابتا بالمیل فأنها تسیر بعد الانصدام متدحرجة علیه بسرعة مساویة الی ع حا ى

وثانیا یکون مقدار قوة الدفع التی یحملها المستوی مساویا الی

$$م (ع حتا ى + عَ حتا هـ) = (١+ى) م ع حتا ى$$

حرکة مرکز الثقل بعد التصادم ـ اذا کان المطلوب معرفة سرعة مرکز ثقل کرتین متحرکتین بانتظام بعد التصادم یقال



شکل ٧٤

ننسب وضعی الکرتین وحرکتهما الی محورین متعامدین وس ، وص شکل ٧٤ موجودین فی مستوی الحرکة ولکن هو مستوی الشکل

ونفرض أن ا ، ب هما وضعا مرکزی الکرتین فی مبدأ الامر وأن اَ ، بَ هما وضعا مرکزیهما بعد الزمن ز وأن ا ، ب هما احداثیا ا ، ب بالنسبة للمحور وس فی مبدأ الزمن ز وأن س ، سَ هما احداثیا اَ ، بَ بعد الزمن ز

وان ع ، عَ هما محللتا سرعتى أ ، ب على الاتجاه وس وهاتان المحللتان تكونان ثابتتين حيث أن الحركتين منتظمتان بالفرض وحينئذ يكون

$$\left.\begin{array}{l}\text{س} = \text{أ} + \text{ع}\,\text{ن} ،\\ \text{سَ} = \text{ب} + \text{عَ}\,\text{ن}\end{array}\right\} \ldots\ldots (١)$$

واذا فرض ان $\text{س}_{١}$ ، $\text{سَ}_{١}$ هما احداثيا مركز الثقل حـ للكرتين فى الوضع الابتدائى وبعد الزمن ن بالنسبة للمحور وس ورمزنا لجسمى الكرتين أ ، ب المذكورتين بالرمزين م ، مَ على التناظر يكون

$$\left.\begin{array}{l}(\text{م} + \text{مَ})\ \text{س}_{١} = \text{م}\ \text{أ} + \text{مَ}\ \text{ب} ،\\ (\text{م} + \text{مَ})\ \text{سَ}_{١} = \text{م}\ \text{س} + \text{مَ}\ \text{سَ}\end{array}\right\} \ldots\ldots (٢)$$

وبالطرح يحدث

$$(\text{م} + \text{مَ})(\text{سَ}_{١} - \text{س}_{١}) = \text{م}(\text{س} - \text{أ}) + \text{م}(\text{سَ} - \text{ب}) = (\text{م}\,\text{ع} + \text{مَ}\,\text{عَ})\ \text{ن} \quad \text{واذن يكون}$$

$$\text{سَ}_{١} - \text{س}_{١} = \frac{(\text{م}\,\text{ع} + \text{مَ}\,\text{عَ})\ \text{ن}}{\text{م} + \text{مَ}} \quad \ldots (٣)$$

وحيث أن $\text{سَ}_{١}$ ـ $\text{س}_{١}$ عبارة عن المسافة التى يقطعها مركز الثقل حـ بالتوازى لمحور السينات وس وأن هذه المسافة تتغير بالنسبة للزمن ن فتكون سرعة مركز الثقل حـ بالتوازى للمحور وس ثابتة وحينئذ اذا رمز لها بالرمز $\text{ع}_{١}$ يكون $\text{ع}_{١} = \dfrac{\text{م}\,\text{ع} + \text{مَ}\,\text{عَ}}{\text{م} + \text{مَ}}$

وبمثل ذلك اذا كان $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{عَ}_{٢}$ ، $\text{ع}_{٣}$ هى سرع أ ، ب ، حـ بالتوازى للمحور وص يكون

$$\text{ع}_{٣} = \frac{\text{م}\,\text{ع}_{٢} + \text{مَ}\,\text{عَ}_{٢}}{\text{م} + \text{مَ}}$$

وحيث علمت سرعتا $\text{ع}_{١}$ و $\text{ع}_{٣}$ فتعلم حركة مركز الثقل حـ

وينتج من ذلك أولا أنه اذا كان هناك ثلاث كرات أو أكثر فبناء على الطريقة السابقة يكون

$$\text{ع}_{١} = \frac{\text{م}\,\text{ع} + \text{مَ}\,\text{عَ} + \text{مً}\,\text{عً} + \ldots\ldots}{\text{م} + \text{مَ} + \text{مً} + \ldots\ldots} = \frac{\text{مج}\ \text{م}\,\text{ع}}{\text{مج}\ \text{م}} ،$$

$$\text{ع}_{٣} = \frac{\text{م}\,\text{ع}_{٢} + \text{مَ}\,\text{عَ}_{٢} + \text{مً}\,\text{عً}_{٢} + \ldots\ldots}{\text{م} + \text{مَ} + \text{مً} + \ldots\ldots} = \frac{\text{مج}\ \text{م}\,\text{ع}_{٢}}{\text{مج}\ \text{م}}$$

واذا لم تكن الحركة فى مستو واحد واعتبرنا محورا ثالثا عموديا على المحورين وس ، وص وليكن وع ورمزنا لسرعة مركز الثقل بالتوازى للمحور المذكور بالرمز $\text{عً}_{٣}$ ولسرع الكرات بالتوازى له أيضا بالرموز $\text{ع}_{٤}$ ، $\text{عَ}_{٤}$ ، $\text{عً}_{٤}$ ، ...... يكون

$$\text{عً}_{٣} = \frac{\text{م}\,\text{ع}_{٤} + \text{مَ}\,\text{عَ}_{٤} + \text{مً}\,\text{عً}_{٤} + \ldots\ldots}{\text{م} + \text{مَ} + \text{مً} + \ldots\ldots} = \frac{\text{مج}\ \text{م}\,\text{ع}_{٤}}{\text{مج}\ \text{م}}$$

ويفهم من ذلك ان سرعة مركز ثقل جملة اجسام بالتوازى لاتجاه معلوم تساوى مجموع كميات تحرك كل منها بالنسبة للاتجاه المذكور مقسوما على جسم الجملة بتمامها

وبعبارة أخرى أنه اذا كانت حركة الأجسام بالتوازى لاتجاه معين منتظم فأن سرعة مركز ثقل الجملة المادية

فى

في الاتجاه المذكور تكون حاصلة كما اذا كانت جميع كمية تحرك الجملة المنسوبة للاتجاه المعلوم مساوية لكمية تحرك جسم واحد بجسم مساو لجسم الجملة ومتحد مع الجملة المذكورة في مركز الثقل ومتحرك بسرعة مركز الثقل المذكور

تنبيه - يمكن تعيين عجلة مركز الثقل من معادلات عين المعادلات السابقة وانما معوض فيها سرع الأجسام المختلفة بالعجلات

وثانيا حيث انه اذا اضفنا سرعا متساوية الى سرعة كل من الأجسام المذكورة فأن الحركة النسبية للجملة لاتتغير فحينئذ اذا أريد ان يكون مركز ثقل الجملة المادية ساكنا باضافة سرعتين مساويتين الى -ع ، -عَ لسرعة كل كرة من الجملة المادية فكمية التحرك اللازم ادخالها لكل من الكرتين ١ ، ب بناء على هذا الفرض تكون هي -م ع ، -مَ ع أو -م × $\frac{مع + مَعَ}{م + مَ}$ ، -مَ × $\frac{مع + مَعَ}{م + مَ}$ بالتوازي للمحور وس ، -م عَ ، -مَ عَ بالتوازي للمحور وص

نظرية - اذا تصادمت كرتان ناعمتان فأن حركة مركز الثقل لا تتغير بتأثير التصادم

لأنه اذا فرض أولا ان الكرتين متحركتان في اتجاه خط التصادم وس شكل ٧٤ أعني ان التصادم مستقيم وفرض ان

ع ، عَ } سرعتا ١ ، ب } قبل التصادم وبعده فيكون
١ع ، ١عَ }

$$ع_م = \frac{مع + مَعَ}{م + مَ} ، ع_ق = \frac{مع + مَعَ}{م + مَ}$$

وحيث ان كمية التحرك بعد التصادم تساوي كمية التحرك قبله بموجب ما تقدم فيكون

$$ع_م = ع_ق$$

ثانيا اذا كان التصادم مائلا

فتحلل سرعتي الكرتين في اتجاهين احدهما خط التصادم والآخر عمودي عليه وبناء على النتيجة الأولى لاتتغير محللة سرعة حركة مركز الثقل في اتجاه خط التصادم بتأثير التصادم وحيث ان محللة سرعة كل من الكرتين في اتجاه عمودي على اتجاه خط التصادم لايتغير بتأثير التصادم فلا تتغير محللة سرعة مركز الثقل في هذا الاتجاه أيضا وعليه فيثبت ان سرعة مركز ثقل الكرتين لاتتغير مقدارا ولا اتجاها بتأثير التصادم

تنبيه - يمكن بدون صعوبة تعميم النظرية المذكورة على الحالة التي فيها توجد جملة كرات وبيان أن حركة مركز ثقل عدد ما من الكرات الملسا لاتتغير بتصادم كرتين أو أكثر من الجملة المذكورة

(مسائل)

المسألة الاولى - كرة ثقلها ٤ ارطال متحركة من اليمين الى اليسار بسرعة قدرها ٨ ياردات في الثانية صدمت تصادما مستقيما كرة اخرى ثقلها ١٠ ارطال متحركة في نفس الجهة بسرعة قدرها ٢ يارده في الثانية

والمطلوب تعيين الحركة بعد التصادم

لذلك يقال اولا اذا لم تكن الكرتان مرنتين فمن حيث ان اثقال الكرات مناسبة لجسماتها فيمكن اعتبار العددين ٤ و ١٠ مبينين لجسمي الكرتين ويحدث

السرعة المشتركة بعد التصادم $= ع_٢ = \frac{م ع + م' ع'}{م + م'} = \frac{٤ \times ٨ + ٢ \times ١٠}{٤ + ١٠} = \frac{٥٢}{١٤} = ٣\frac{٥}{٧}$ ياردة في الثانية

$$س = \frac{م م' (ع - ع')}{م + م'} = \frac{٤ \times ١٠ (٨ - ٢)}{٤ + ١٠} = \frac{٢٤٠}{١٤} = ١٧\frac{١}{٧}$$

بمعنى ان الضغط المشترك بين الكرتين يحدث سرعة قدرها $١٧\frac{١}{٧}$ ياردة في الثانية لجسم ثقله رطل واحد

وثانيا اذا كانت الكرتان مرنتين فبموجب ما تقدم يكون

$$\text{سرعة ا بعد التصادم} = ع_٢ = ٨ - \frac{(١ + ى) \times ١٠ \times (٨ - ٢)}{٤ + ١٠} = \frac{٢٦}{٧} - \frac{٣٠}{٧} \times ى$$

$$\text{وسرعة ب بعد التصادم} = ع'_٢ = ٢ + \frac{(١ + ى) \times ٤ \times (٨ - ٢)}{٤ + ١٠} = \frac{٢٦}{٧} + \frac{١٢}{٧}\, ى$$

$$س = ١٧\frac{١}{٧}\,(١ + ى)$$

فاذا كان $ى = \frac{١٣}{١٥}$ فالكرة ا تكون ساكنة بعد التصادم وعلى حسب كون ى < أو > $\frac{١٣}{١٥}$ فأن ا يتبع ب بسرعة أقل من سرعتها قبل التصادم أو تنعكس ثانيا وتتحرك في جهة مضادة للأولى

المسألة الثانية — كرة ا متحركة بسرعة معلومة صدمت تصادما مستقيما كرة ب الساكنة ثم ان كرة ب صدمت تصادما مستقيما كرة ح الساكنة والمطلوب ايجاد سرعة الكرة ح

لذلك يقال انه بناء على ما تقدم تكون سرعة ب بعد التصادم الأول هي

$$ع' = \frac{(١ + ى)\, م}{م + م'} \times ع \quad \text{وسرعة ح بعد التصادم الثاني هي}$$

$$ع''_٢ = \frac{(١ + ى)\, م'}{م' + م''} \times ع'_٢ = \frac{(١ + ى)^٢\, م\, م'}{(م + م')(م' + م'')} \times ع$$

وينتج من ذلك ان السرعة التي تأخذها ح بتوسط ب تتغير على حسب جسم ب وتكون نهاية عظمى حينما يكون $\frac{م'}{(م + م')(م' + م'')}$ أكبر ما يمكن اعني حينما يكون $\frac{(م + م')(م' + م'')}{م'}$ أصغر ما يمكن وحيث انه يمكن كتابة المقدار المذكور بالصورة

$$\left(\sqrt{م'} - \sqrt{\frac{م\, م''}{م'}}\right)^٢ + \left(\sqrt{م} + \sqrt{م''}\right)^٢$$

وان هذا المقدار يكون اصغر ما يمكن حينما يكون $م' = \sqrt{م\, م''}$ أي حينما يكون م' وسطا متناسبا بين م، م'' فحينئذ يكون مقدار $ع''_٢$ نهاية عظمى حينما يكون م' وسطا متناسبا بين م، م''

المسألة الثالثة — نقطة مادية قذفت من نقطة معينة ه شكل ٧٥ بحيث تمر من نقطة أخرى معلومة ك بعد انعكاسها على مستو ثابت معلوم والمطلوب ايجاد اتجاه خط التصادم

لذلك نفرض ان ء هي نقطة انصدام النقطة المادية بالمستوى المفروض فحينئذ يكون المستوى ه ء ك عموديا على المستوى الثابت المذكور ويقطعه في مستقيم ا ب

وحيث ان النقطة المادية قذفت في اتجاه ه ء وانعكست على اتجاه ء ك فبناء على ما تقدم في التصادم

على

على مستو يكون

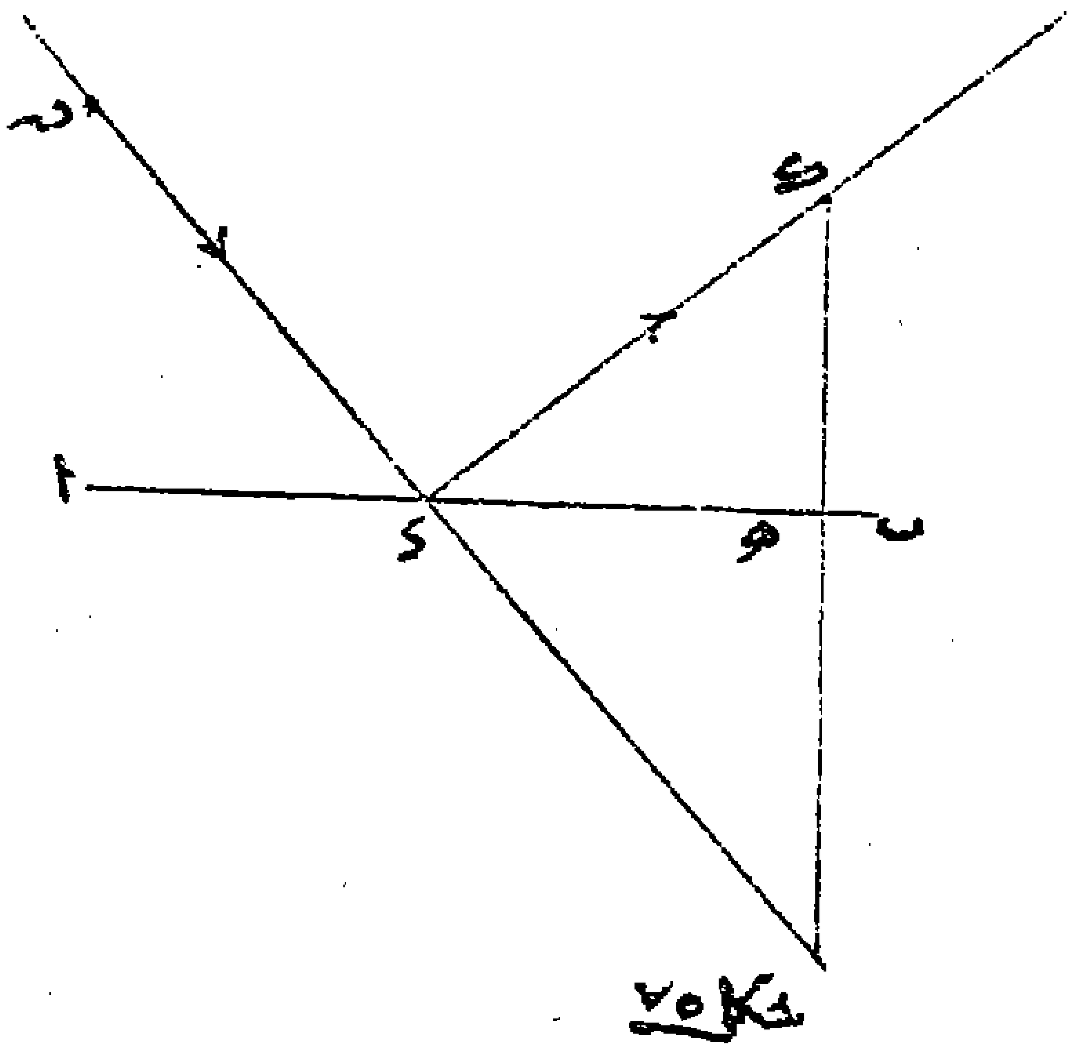
طا ک ء هـ = ی طا ه ء ا ......(١)

فاذا انزل ک هـ عموديا على ا ب ومد ه ء حتى يقطع

امتداد ک هـ في نقطة و يكون

طا ک ء هـ = ی طا و ء هـ وعليه يكون

ک هـ = ی × هـ و



شكل ٧٥

ومن ذلك تنتج طريقة بسيطة لتعيين نقطة ء وهي

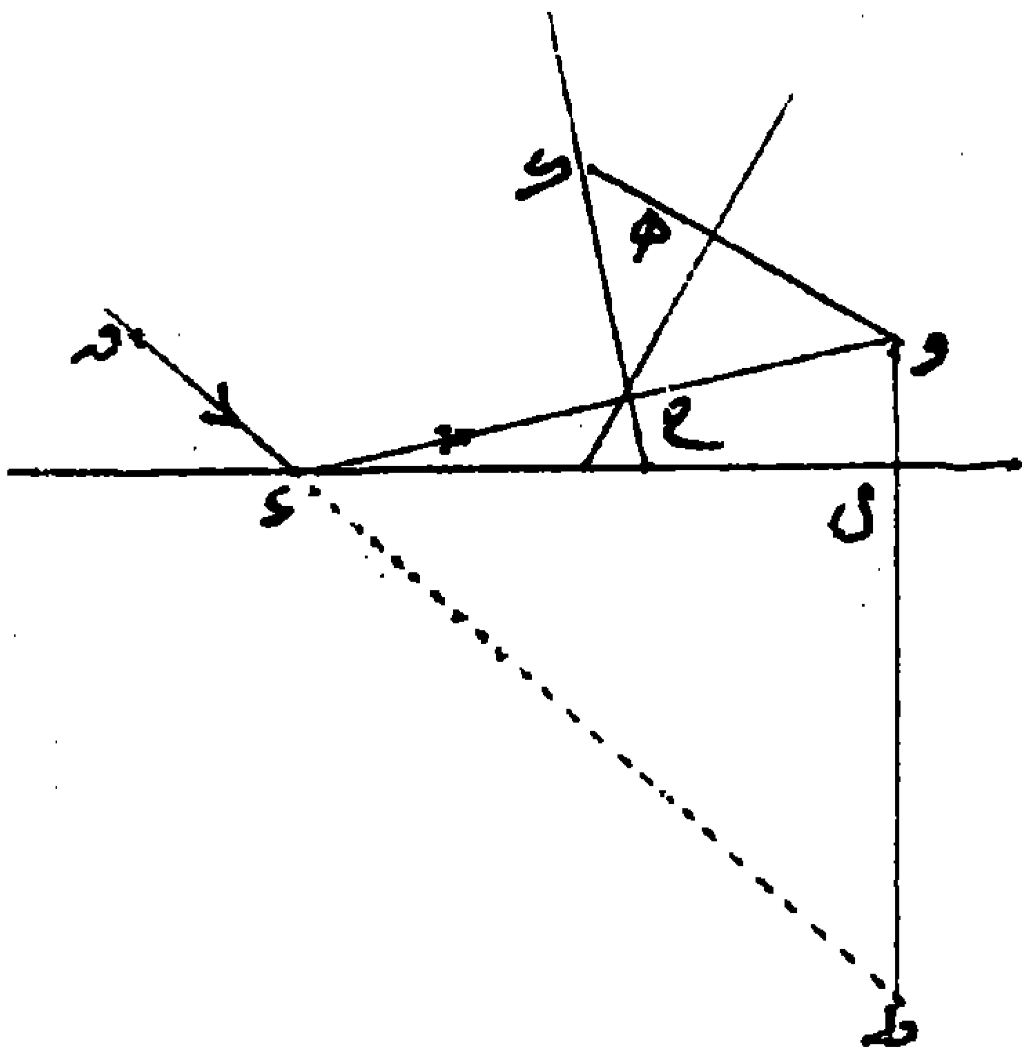
أن نرسم ک هـ عموديا على ا ب ونمده على استقامته

ونأخذ عليه بعد هـ و = $\frac{1}{ی}$ × ک هـ ثم نصل ه و

فيقطع ا ب في نقطة ء فيكون ه ء هو الاتجاه المطلوب

وينتج من ذلك انه اذا مرت النقطة المادية من نقطة ک بعد انصدامها على مستويين ء ل ، ع هـ على التوالي

شكل ٧٦ فحل المسألة بالطريقة الآتية وهي



شكل ٧٦

ان نرسم ک هـ و عموديا على المستوى الثاني ع هـ ونجعل

هـ و = $\frac{1}{ی}$ × ک هـ

ثم نرسم و ل ط عموديا على المستوى الأول ء ل ونجعل

ل ط = $\frac{1}{ی}$ × ل و

ونصل ه ط فيقطع المستوى الأول في نقطة ء فنصل ء و

فيقطع المستوى الثاني في نقطة ع وحينئذ اذا قذفت النقطة

المادية في اتجاه ه ء فانها تنعكس على اتجاه ء ع ومن ع

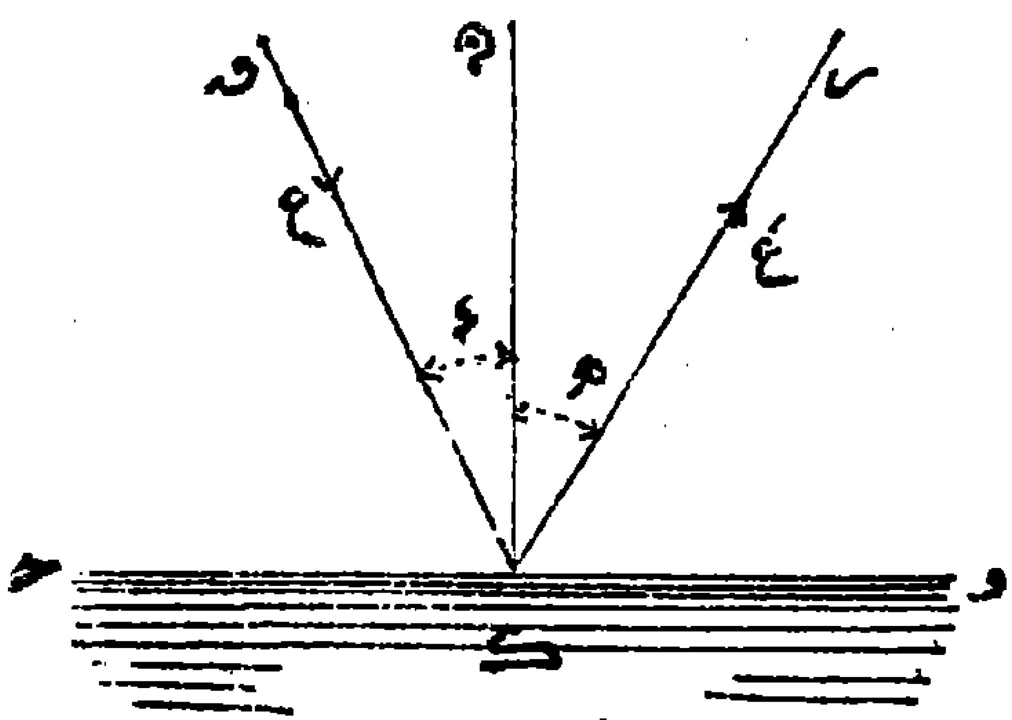
تنعكس ثانيا على اتجاه ع ک وتمر بالنقطة ک

المسألة الرابعة ـ نقطة مادية صدمت مستويا خشنا

ثابتا والمطلوب ايجاد حركتها بعد التصادم

لذلك نفرض ان مستوى الشكل هو مستوى التصادم اى المستوى المشتمل على اتجاه الحركة قبل التصادم وعلى

المستقيم العمودى على المستوى الثابت في نقطة التصادم



شكل ٧٧

ونفرض ان ع ، ع َ شكل ٧٧ هما سرعتا النقطة المادية التي

جسمها م قبل التصادم وبعده وان ء ، هـ هما زاويتا ميلها

على المستقيم العمودى على المستوى قبل التصادم وبعده

وان س ، ف هما كميتا التحرك الكليتان الناشئتان عن

المستوى الثابت للنقطة المادية في الاتجاهين ک ، ک هـ

مع ملاحظة ان كمية التحرك الثانية ناشئة عن خشونة المستوى

وحينئذ اذا حللنا الحركة على اتجاهى ءى ا ح و فأنه بناء على ما تقدم فى التصادم على مستو يكون

$$ع' \, حا هـ = ى \, ع \, حا ء \quad .... (١)$$

ويكون مقدار كمية التحرك الكلية س هو

$$س = (١+ى) \, م \, ع \, حا ء \quad .... (٢)$$ ويكون أيضا

$$م \, ع' \, حا هـ = م \, ع \, حا ء - ف \quad ..... (٣)$$

فاذا جعلنا ف = ۍ س التى فيها ۍ معامل يتعلق بخشونة المستوى ومقداره الرقمى يتعين بالتجربة ويسمى احيانا معامل الاحتكاك الديناميكى فتكون اربع معادلات ينتج منها المعادلتان الآتيتان

$$ع' \, حا هـ = ى \, ع \, حا ء$$

$$ع' \, حا هـ = ع \, حا ء - ۍ \, (١+ى) \, ع \, حا ء$$

ومن هاتين المعادلتين يتعين مقدارا ع' ، هـ أعنى سرعة التحرك واتجاهه بعد التصادم

الشغل المفقود بتأثير تصادم الأجسام

أولا حالة الأجسام الرخوة — اعلم ان التغير الحاصل فى شكل الاشكال من تأثير الانضغاط يحدث فقدا من القوى الحية مبتلعا بالقوى العنصرية وسنعين الفقد المذكور الذى نصفه المساوى للقدرة الحية يدل على الشغل المفقود من بعد ملاحظة ان القوى الحية عبارة عن نصف القدرة الحية فنقول

نظرية كارنو — مجموع مفاقيد القوى الحية يساوى حاصل جمع القوى الحية المطابقة للسرع المكتسبة أو المفقودة للأجسام المتصادمة

فأولا اذا كان الجسمان سائرين فى جهة واحدة فأن القوى الحية المحصلة قبل الانضغاط تكون $م ع^٢ + م' ع'^٢$ وأن القوى الحية المحصلة بعد الانضغاط تكون $(م + م') ع_٢^٢$ وعليه فتكون مفاقيد القوى الحية مساوية الى $م ع^٢ + م' ع'^٢ - (م + م') ع_٢^٢$ وبناء على منطوق النظرية تكون المفاقيد المذكورة مساوية الى $م (ع - ع_٢)^٢ + م' (ع_٢ - ع')^٢$ أعنى يكون

$$م ع^٢ + م' ع'^٢ - (م + م') ع_٢^٢ = م (ع - ع_٢)^٢ + م' (ع_٢ - ع')^٢$$

وللبرهان على ذلك نعوض $ع_٢$ بمقدارها وهو $\frac{م ع + م' ع'}{م + م'}$ فى كل من طرفى المعادلة المذكورة وحينئذ يحدث

$$م ع^٢ + م' ع'^٢ - (م + م') \left(\frac{م ع + م' ع'}{م + م'}\right)^٢ = م \left(ع - \frac{م ع + م' ع'}{م + م'}\right)^٢ + م' \left(\frac{م ع + م' ع'}{م + م'} - ع'\right)^٢$$

ولاجل تحليل هذه المعادلة ومعرفة تساوى طرفيها نأخذ كل طرف على حدته ونحلله فالطرف الأول يؤول من بعد تحويله الى مقام مشترك وأخذ م م' مضروبا مشتركا الى

$$\frac{م م' (ع^٢ + ع'^٢ - ٢ ع ع')}{م + م'} = \frac{م م' (ع - ع')^٢}{م + م'}$$

وأما الطرف

وأما الطرف الثانى فأنه يؤول على التوالى الى

$$\text{م}\left[\frac{\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})}{\text{م}+\text{مَ}}\right]^{2}+\text{مَ}\left[\frac{\text{م}(\text{ع}-\text{عَ})}{\text{م}+\text{مَ}}\right]^{2}=\frac{\text{م}\,\text{مَ}^{2}(\text{ع}-\text{عَ})^{2}}{(\text{م}+\text{مَ})^{2}}+\frac{\text{مَ}\,\text{م}^{2}(\text{ع}-\text{عَ})^{2}}{(\text{م}+\text{مَ})^{2}}=\left(\frac{\text{ع}-\text{عَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\right)^{2}(\text{م}\,\text{مَ}^{2}+\text{مَ}\,\text{م}^{2})=$$

$$\left(\frac{\text{ع}-\text{عَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\right)^{2}(\text{م}+\text{مَ})\,\text{م}\,\text{مَ}=\text{م}\,\text{مَ}\,\frac{(\text{ع}-\text{عَ})^{2}}{\text{م}+\text{مَ}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})^{2}}{\text{م}+\text{مَ}}-\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})^{2}}{\text{م}+\text{مَ}}$$

وهو المطلوب

وثانيا اذا كان الجسمان سائرين فى جهتين متضادتين فأن فقد القوة الحية يصير مبينا من بعد اجراء العمل كما تقدم بالمقدار الآتى

$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}+\text{عَ})^{2}}{\text{م}+\text{مَ}}$$

ثالثا اذا كان احد الجسمين ساكنا فأن فقد القوة الحية يكون مبينا بالمقدار الآتى

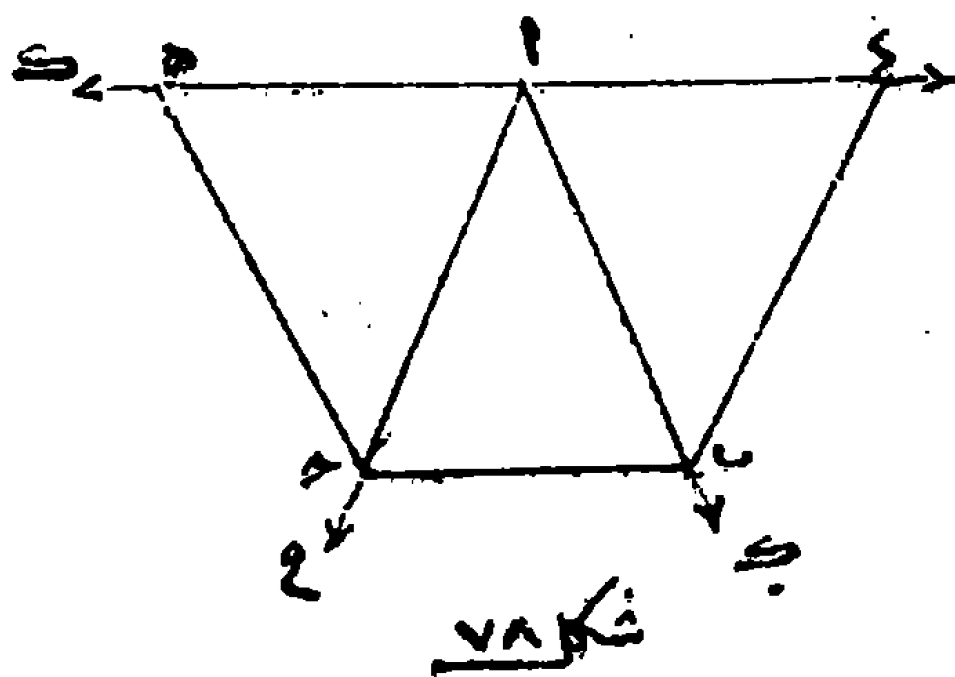
$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}\times\text{ع}^{2}}{\text{م}+\text{مَ}}$$

تنبيه — مهما كانت الحالة المعتبرة فأنه توجد دائما شغل مفقود بانصدام الأجسام الرخوة والشغل المفقود الأعظم يقابل الحالة التى يكون فيها سير الجسمين فى جهتين متضادتين

ثانيا حالة الأجسام المرنة — اعلم أنه فى المدة الأولى من تصادم الأجسام المرنة يحصل فقد قوة حية كما فى حالة الأجسام الرخوة وهذا الفقد منسوب لتغير اشكال الأجسام المتصادمة فى المدة المذكورة ولكن فى المدة الثانية من الانصدام بسبب رجوع اشكال الأجسام الى أصلها بتأثير المرونة ترد كل القوة الحية التى صار فقدها فى المدة الأولى بالتمام والكمال وعليه فالقوة الحية المفقودة بالانصدام تكون معدومة فى حالة الاجسام المرنة

الحالة التى يكون فيها الجسمان المتصادمان متحركين فى اتجاهين حيثما اتفق

اذا تصادم جسمان متحركان فى اتجاهين حيثما اتفق فان سرعة كل منهما تتغير وتنقص نظرا للانصدام ويتغير اتجاهها بعد الانصدام بخلاف ما اذا كان الجسمان المذكوران سائرين فى اتجاه واحد وفى جهة واحدة فأن سرعة الجسم الصادم تنقص وسرعة الجسم المصدوم تزداد وحيث أن السرعة المفقودة بالانصدام بالنسبة لكل من الجسمين المتصادمين عند تحركهما فى اتجاهين حيثما اتفق عبارة عن المركبة الثانية للسرعة قبل الانصدام فلتعيينها يقال انه اذا فرض كما فى شكل ٧٨ أن اب مقدار واتجاه سرعة أحد الجسمين قبل لحظة الانصدام ولنرمز لها بالرمز ك وأن اء مقدار واتجاه سرعة بعد لحظة الانصدام ولنرمز لها بالرمز ك فحينئذ اذا وصل ء ب وكمل متوازى الأضلاع اء ب ح يكون اح عبارة عن مقدار واتجاه السرعة المفقودة بالانصدام ولنرمز لها بالرمز ع وحينئذ اذا علم مقدارا ك ، ك والزاوية الواقعة بينهما يمكن



شكل ٧٨

تعيين مقدار واتجاه السرعة المفقودة بالانصدام ع بواسطة الحساب من مثلث ا ء ب الذى يكون معلوما فيه الضلعان والزاوية المحصورة بينهما

واذا كمل متوازى الاضلاع ا ب ح ء يرى ان السرعة المفقودة بالانصدام تكون عبارة عن محصلة السرعة قبل الانصدام والسرعة بعد الانصدام مأخوذة فى الجهة المضادة

ولنبرهن على نظرية كارنو فى حالة تصادم الجسمين المتحركين فى اتجاهين حيثما اتفق فنقول

نظرية كارنو – من بعد ملاحظة ان نظرية كارنو لا تنطبق على تصادم الأجسام المرنة يقال انه اذا اعتبرت السرع الثلاث ى ، ك ، ع شكل ٧٨ بالنسبة لأحد عناصر الجسمين المتصادمين لمن مثلث ا ب ح يحدث

$$\text{ى}^2 = \text{ك}^2 + \text{ع}^2 + ٢\,\text{ع}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ع})$$

واذا رمز للجسم العنصر المذكور بالرمز م وضرب طرفا المعادلة المذكورة فى م يحدث

$$\text{م}\,\text{ى}^2 = \text{م}\,\text{ك}^2 + \text{م}\,\text{ع}^2 + ٢\,\text{م}\,\text{ع}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ع})$$ اويكون

$$\text{م}\,(\text{ى}^2 - \text{ك}^2) = \text{م}\,\text{ع}^2 + ٢\,\text{م}\,\text{ع}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ع})$$

وحيث أنه بالنسبة لكل عنصر من عناصر الجسمين المتصادمين تحدث معادلة مشابهة للمعادلة المذكورة فحينئذ اذا جمعت المعادلات المشابهة للمعادلة المذكورة المنسوبة للعناصر المختلفة السابق ذكرها طرفا بطرف على بعضها فانه يحدث

$$\text{مجموع}\ \text{م}\,(\text{ى}^2 - \text{ك}^2) = \text{مجـ}\,\text{م}\,\text{ع}^2 + ٢\,\text{مجـ}\,\text{م}\,\text{ع}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ع})$$

ولكن اذا رمزنا بحرف ق للقوة الواقعة على العنصر الذى جسمه م التى تحدث السرعة ع فى نهاية مدة الانصدام الصغيرة جدا بقدر مايراد التى نرمز لها بالرمز ء يكون

$$\text{ق} = \frac{\text{م}\,\text{ع}}{\text{ء}}$$ ومنها يحدث $\text{ق}\,\text{ء} = \text{م}\,\text{ع}$

واذا وضع عوضا عن م ع مقداره فى المعادلة السابقة يحدث

$$\text{مجموع}\ \text{م}\,(\text{ى}^2 - \text{ك}^2) = \text{مجموع}\ \text{م}\,\text{ع}^2 + ٢\ \text{مجموع}\ \text{ق}\,\text{ء}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ع})$$

وحيث ان اتجاه وجهة القوة ق هما طبعا فى اتجاه وجهة السرعة ع فيكون

$$\text{مجموع}\ \text{م}\,(\text{ى}^2 - \text{ك}^2) = \text{مجموع}\ \text{م}\,\text{ع}^2 + ٢\ \text{مجموع}\ \text{ق}\,\text{ء}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ق})$$

ولكن حيث ان الحاصل ق ء ك حتا (ك ، ق) عبارة عن شغل القوة ق فى مدة الزمن ء الصغير جدا بقدر مايراد فيمكن اعتبار الشغل المذكور معدوما وعليه يكون

$$\text{مجموع}\ \text{ق}\,\text{ء}\,\text{ك}\ \text{حتا}\,(\text{ك}\,،\,\text{ق}) = ٠$$ وحينئذ يحدث

$$\text{مجموع}\ \text{م}\,(\text{ى}^2 - \text{ك}^2) = \text{مجموع}\ \text{م}\,\text{ع}^2$$

اعنى ان مجموع مفاقيد القوى الحية يساوى مجموع القوى الحية المنسوبة لسرع المفقوده لعناصر الجسمين

المتصادمين وهو المطلوب

واذا رمز للشغل الناتج من تأثير الانضدام بالرمز شَ يكون

شَ = ½ مجموع م (كَ - كً) او يكون

- شَ = ½ مجموع م (كً - كَ) وبناء على نظرية كارنو يكون

- شَ = ½ مجموع م فَ²

وبضم هذه المعادلة الى المعادلة العمومية للقدرة الحية التي هي مجموع ش ه = ½ مجموع م (غً - غَ) طرفا بطرف يحدث

مجموع ش ه - شَ = ½ مجموع م (غً - غَ) + ½ مجموع م فَ²

وحيث انه في الآلات المتحركة اى في الجملة المادية المتحركة مجموع ش ه عبارة عن ثلاثة اشغال وهى الشغل المحرك اى شغل القوى المحركة الذى يرمز له بالرمز شُ ويعتبر دائما موجبا والشغل المفيد اى شغل المقاومات المفيدة اى الأصلية الذى يرمز له بالرمز شِ ويعتبر سالبا ثم شغل المقاومات التأثوية الذى يرمز له بالرمز شٍ وتلك المقاومات عبارة عن الاحتكاكات ويبوسة الأحبال والسيور وان الشغل المذكور يكون سالبا أيضا فحينئذ تؤول المعادلة السابقة الى

شُ - شِ - شٍ - شَ = ½ مجموع م (غً - غَ) + ½ مجموع م فَ²

واذا رمز لمجموع الثلاثة اشغال السالبة بالرمز شٌ الذى يكون عبارة عن الشغل المقاوم الخام فأنه يحدث

شُ - شٌ = ½ مجموع م (غً - غَ) + ½ مجموع م فَ²

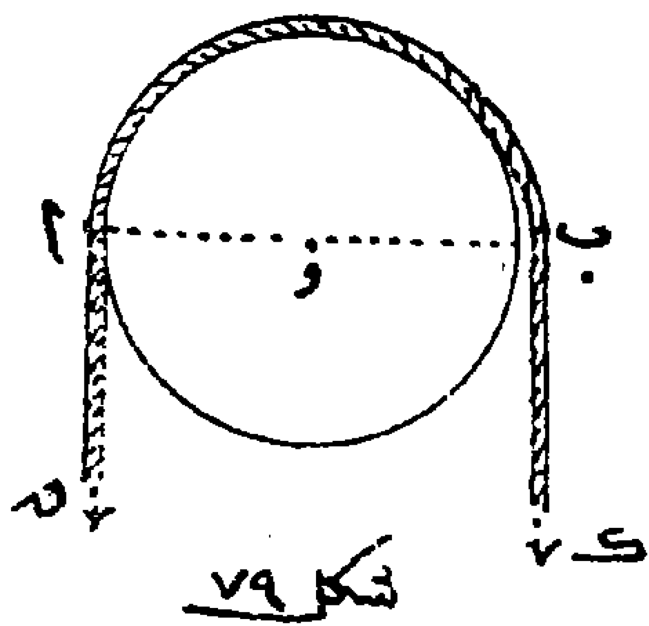
وهذه معادلة القدرة الحية مطبقة على حركة الآلات أو الجمل المادية باعتبار الانضدام

في يبوسة الأحبال

يبوسة الحبل هى المقاومة التى تحدثها عند لفه على بكرة أو طنبور

ويبوسة الأحبال تحدث فقدا مضاعفا من الشغل حيث انه يقتضى قوة لثنيها ولفها وقد ظهر من التجربة ان الفرع ب ك للقوة المقاومة ك لا يلتصق بالضبط على الطنبور كما في شكل ٧٩ بخلاف الفرع ا ه للقوة المحركة فأنه يبقى ملتصقا على الطنبور المذكور بحيث ان و ب ذراع رافعة المقاومة يزداد ويحتاج لقوة كبيرة لأجل حصول التوازن

ويبوسة الحبل تتناسب عكسيا لقطر الطنبور وغير متعلقة بالسرعة وتتغير تبعا لجنس الحبل ولدرجة التوائه وعلى حسب كونه جديدا أو مستعملا أبيض أو مقطرنا جافا أو مبتلا



شكل ٧٩

وبناء على مناقشة نتائج التجارب التى حصل عليها المعلم كولمب بخصوص تعيين مقدار اليبوسة قد استنتج نافييه القانون الآتى الذى يحسب به مقدار

اليبوسة المذكورة التي يرمز لها بحرف ر وهو

$$ر = \frac{١}{ء} (ا ءَ^و + ب ءَ^و ك) \quad .... (٢)$$

الذي فيه ء رمز لقطر البكرة أو الطنبور ، ءَ رمز لقطر الحبل ، ا ءَ^و كمية ثابتة بالنسبة لحبل الواحد ، ب ءَ^و ك كمية مناسبة للثقل المرفوع ك ، و عدد يتغير على حسب استعمال الحبل واستهلاكه وقد اعتبر نافييه و = ٢ بالنسبة للأحبال الجديدة ذات القطر الكبير ، و = ١,٥ بالنسبة للأحبال الأكثر من نصف استعمال ، و = ١ بالنسبة للأحبال الرفيعة اللينة جدا

واعتبر أيضا أنه بالنسبة لمقاومة معلومة ك تكون المقاومة المنسوبة ليبوسة حبل ابيض متغيرة بالنسبة العكسية لقطر البكرة أو الطنبور ومناسبة للأس (و) لقطر الحبل المذكور

وينتج من الاعتبار المذكور أنه بالنسبة لحبلين مختلفي القطر ملتفين على بكرتين غير متساويتي القطر ورافعين ثقلين متساويين يكون

$$رَ = ر \frac{ء}{ءَ} \left(\frac{ءَ}{ء}\right)^و \quad .... (ب)$$

وفي هذا القانون رَ المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذي قطره ءَ الملتف على البكرة التي قطرها ءَ

، ر المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذي قطره ءَ الملتف على البكرة التي قطرها ء

وأما بالنسبة للأحبال المقطرنة فإن اليبوسة لا تتغير تغيرا محسوسا بالنسبة لدرجة الاستهلاك ومن الأضبط في هذه الحالة أن نعوض في القانون السابق النسبة $\left(\frac{ءَ}{ء}\right)^و$ بالكمية $\frac{نَ}{ن}$ ، ن ، نَ رمزان لعدد خيوط الجديلة المشتمل عليها كل من الحبلين المذكورين وحينئذ يكون

$$رَ = ر \frac{ء}{ءَ} \times \frac{نَ}{ن}$$

وقد اعتبر المعلم نافييه أن في الأحبال البيضاء المبتلة تكون اليبوسة الثابتة ا ءَ^و ضعف يبوسة الأحبال بعينها في الحالة الجافة وأما اليبوسة ب ءَ^و فتكون بعينها كما في الحالة الأخيرة وهاك جدولا يشتمل على يبوسة أحبال مختلفة ملتفة على بكرة قطرها متر واحد محسوبا بمعرفة المعلم نافييه بناء على تجارب المعلم كولمب

اجناس الأحبال	عدد خيوط الحبل	اقطار الأحبال	ثقل المتر الطولى من الأحبال	اليبوسة الثابتة ١ ء ر	اليبوسة المتغيرة د ء ر بالنسبة للكيلوجرام الواحد في الحبل ك
		مـتر	كيلوجرام	كيلوجرام	كيلوجرام
حبل ابيض جديد	٣٠	٠ر٠٢٠٠	٠ر٢٨٤٤	٠ر٢٢٢٤٦	٠ر٠٠٩٧٤٨٢
« « «	١٥	٠ر٠١٤٤	٠ر١٤٤٨	٠ر٠٦٤٥١٤	٠ر٠٠٥٥١٨٢
« « «	٦	٠ر٠٠٨٨	٠ر٠٥٢٢	٠ر١٠٦٠٤٨	٠ر٠٠٢٤٨٠٤
حبل مقطرن	٣٠	٠ر٠٢٤٦	٠ر٤٤٢٦	٠ر٤٤٩٦	٠ر٠١٢٥٥١٤
« «	١٥	٠ر٠١٦٨	٠ر١٦٤٢	٠ر١٠٥٩٢٨	٠ر٠٠٦٠٥٩٢
« «	٦	٠ر٠٠٩٦	٠ر٠٦٩٤	٠ر٠٢١٢٠٨	٠ر٠٠٢٥٩٦٢

وبواسطة الجدول السابق وتسليم صحة القانونين يمكن حل جميع المسائل المشابهة للمسألة الآتية

مسألة ـ اذا كان المطلوب تعيين مقدار المقاومة المنسوبة ليبوسة حبل ابيض جديد قطره ٠ر٠٢٥٤ متر ملتف على بكرة قطرها ٠ر٤٠ متر رافع ثقلا قدره ٥٠٠ كيلوجرام يقال

نحسب المقاومة المنسوبة لليبوسة بناء على الحبل الأبيض الجديد الذى قطره ٠ر٠٢ متر القريب جدا من ٠ر٠٢٥٤ متر وحينئذ من بعد تعويض الرموز بمقاديرها في معادلة (١) يحدث

ر = ١/٠ر٤٠ (٠ر٢٢٢٤٦ + ٠ر٠٠٩٧٤٨٢ × ٥٠٠) = ١٢ر٧٢ كيلوجرام

ثم نحسب المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذى قطره ٠ر٠٢٥٤ متر الموضوع فى الأحوال السابقة عينها بقانون ب وحينئذ يكون

رَ = ١٢ر٧٢ (٠ر٠٢٥٤ / ٠ر٠٢)^٢ = ٢٠ر٥٢ كيلوجرام

وأخيرا لما ناقش المعلم موران النتائج التى تحصل عليها كلومب استنتج مع الرمز بحرفى ع ، هـ للكميتين اللتين بينهما ناقيه بالمقدارين ١ ء ر ، د ء ر ماهو آت

أولا بالنسبة للأحبال الجديدة التى من الكتان غير المقطرن المسماة بالأحبال البيضا ناشفة كانت أو مندأة بالماء فان الكميتين ع ، هـ تتغيران تقريبا بالنسبة لمربع قطر الحبل

وثانيا بالنسبة للأحبال السابقة عينها المستهلكة نصف استهلاك فأن ع ، هـ يتغيران بالنسبة للأس ١/٥ أعنى بالنسبة للجذر التربيعى لمكعب اقطار الأحبال

وثالثا بالنسبة للأحبال المقطرنة فأن هـ تكون مناسبة لعدد خيوط جديلة الحبل

وعلى هذا قد وضع المعلم موران القوانين الآتية التى فيها ن رمز لعدد خيوط الجديلة ، ء رمز لقطر البكرة وهى

اولا بالنسبة للأحبال البيضاء

ع = (٠٫٠٠٠٢٩٧ + ٠٫٠٠٠٠٢٤٥ × ن) ن ، هـ = ٠٫٠٠٠٣٦٤ × ن

ثم م = ١/ق [(٠٫٠٠٠٢٩٧ + ٠٫٠٠٠٠٢٤٥ × ن) ن + ٠٫٠٠٠٣٦٤ ن ك] كيلوجرام

وثانيا بالنسبة للأحبال المقطرنة

ع = (٠٫٠٠١٤٥٧٥ + ٠٫٠٠٠٣٤٦ × ن) ن ، هـ = ٠٫٠٠٠٤١٨ × ن

ثم م = ١/ق [(٠٫٠٠١٤٥٧٥ + ٠٫٠٠٠٣٤٦ × ن) ن + ٠٫٠٠٠٤١٨ × ن × ك] كيلوجرام

وهاك جدولا يشتمل على اقطار الأحبال على حسب عدد خيوط الجديله

عدد خيوط الجديله	الأقطار	عدد خيوط الجديله	الاقطار	عدد خيوط الجديله	الاقطار	عدد خيوط الجديله	الأقطار
	متر		متر		متر		متر
٦	٠٫٠٠٨٩	٢١	٠٫٠١٦٨	٣٦	٠٫٠٢٢٠	٥١	٠٫٠٢٦١
٩	٠٫٠١١٠	٢٤	٠٫٠١٧٩	٣٩	٠٫٠٢٢٨	٥٤	٠٫٠٢٦٨
١٢	٠٫٠١٢٧	٢٧	٠٫٠١٩٠	٤٢	٠٫٠٢٣٧	٥٧	٠٫٠٢٧٦
١٥	٠٫٠١٤١	٣٠	٠٫٠٢٠٠	٤٥	٠٫٠٢٤٦	٦٠	٠٫٠٢٨٣
١٨	٠٫٠١٥٥	٣٣	٠٫٠٢١٠	٤٨	٠٫٠٢٥٤		

تطبيق على ما تقدم - اذا كان المطلوب حل المسألة السابقة التى صار حلها بوضع مقدارا ع ، هـ فى المعادلة الآتية وهى

م = ١/ق (ع + هـ ك)

مع ملاحظة انه فى هذه الحالة ن = ٤٨ بناء على الجدول السابق حيث ان قطر الحبل يساوى ٠٫٠٢٥٤ متر وعليه يكون

م = ١/٠٫٤٠ [(٠٫٠٠٠٢٩٧ + ٠٫٠٠٠٠٢٤٥ × ٤٨) ٤٨ + ٠٫٠٠٠٣٦٤ × ٤٨ × ٥٠٠] أو

م = ١/٠٫٤٠ [٠٫٠٧٨٧٥٠٤ + (٠٫٠١٧٤٧٢ × ٥٠٠) = ٢٣٫٢٣ كيلوجرام

وهذا المقدار الأخير مغاير للمقدار ٢٠٫٥٣ كيلوجرام الذى وجد باستعمال جدول نافيه الشغل المفقود بيبوسة الأحبال - اذا لاحظنا شكل ٧٩ وقطعنا النظر عن نصف قطر الحبل وعن تباعده عن البكره بسبب اليبوسة فان الشغل المفقود بيبوسة الحبل المذكور الملتف على البكرة المذكورة باعتبار قطرها يساوى ٠٫٤٠ بالنسبة للدورة الكاملة يكون

ش = ط ق × ٢٣٫٢٣ (كجرام) = ٣٫١٤ × ٠٫٤٠ × ٢٣٫٢٣ = ٢٩٫١٨ كيلوجرامتر

وحيث أنه بقطع النظر عن الاحتكاك يكون مقدار شغل القوة المحركة بالنسبة للدورة الكاملة هو

ش م = ق × ط

$$ش = ه \times ط (ء+ءَ) = ك \times ط (ء+ءَ) + ر \times ط ء$$

فيكون

$$ه = ك + ر \times \frac{ء}{ء + ر}$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار القوة المحركة

المتحرك على منحنى

اذا تحرك جسم على منحنى أملس فأن المنحنى يحدث ضغطا أو رد فعل على الجسم المذكور فى كل نقطة ولكن حيث ان رد الفعل يكون على الدوام عموديا على المنحنى فأنه لا ينشأ عنه اسراع أو ابطاء لحركة الجسم المذكور ولاجل تعيين سرعة الجسم فى أى نقطة يجب تحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه الحركة فى اللحظات المتتالية واختبار تأثير هذه القوى المحللة

فاذا انزل متحرك غير مرن على منحنى أملس فى مستو راسى بتأثير التثاقل وكان المطلوب ايجاد سرعة المتحرك المذكور فى أى وضع كان يقال

انه يمكن اعتبار المنحنى نهاية مضلع اضلاعه متساوية الميل على بعضها وعددها آخذ فى الازدياد بقدر ما يراد وان الزوايا الواقعة بين الاضلاع المتتالية تصير عند النهاية معدومة

شكل ٨٠

وحينئذ اذا فرض ان المضلع المذكور هو ١ ١ ١ ... ١ن شكل ٨٠ ورسم ١ ١ ، ١ ١ ، ١ ١ .... عمودية على الخط الرأسى المار بنقطة ١ وان ه هى الزاوية الواقعة بين ضلعين متتابعين من المضلع اللذين لا يلزم أن يكون طولهما واحدا

وان ع هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ١ فى الاتجاه ١ ١

وان ع هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ١ فى الاتجاه ١ ١

وان ع هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ١ فى الاتجاه ١ ١

. . . .

وان $ع_ن$ هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة $١_ن$ فى الاتجاه $١_{ن-١}$ $١_ن$

فأنه بتطبيق نظرية القدرة الحية على كل مسافة جزئية مثل ١ ١ ، ١ ١ ،.... يكون

$$\frac{١}{٢} م عَ^٢ - \frac{١}{٢} م ع^٢ = ش ث$$ او

$$\frac{ث}{٢ح} عَ^٢ - \frac{ث}{٢ح} ع^٢ = ث \times ١ ١$$ أو

$$عَ^٢ = ع^٢ + ٢ح \times ١ ١$$ وبمثل ذلك يكون

$$ع^٢ = عَ^٢ جتا^٢ ه + ٢ح \times ١ ١$$ حيث انه وصل المتحرك الى ١ فأنه يغير اتجاهه

الى $ا_١ ا_٢$ بسرعة قدرها $ع_١$ حتا هـ وكذا يكون

$$ع_٢^٢ = ع_١^٢ \,\text{حتا}^٢\,\text{هـ} + ٢\,\text{جـ} \times ا_١ ا_٢$$

،

. . . .

$$ع_ن^٢ = ع_{ن-١}^٢ \,\text{حتا}^٢\,\text{هـ} + ٢\,\text{جـ}\, ا_{ن-١} ا_ن$$

وبالجمع والتحويل يحدث

$$ع_ن^٢ + (ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ع_٣^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢)\,\text{حا}^٢\,\text{هـ} = ع^٢ + ٢\,\text{جـ} \times ا ا_ن \dots (١)$$

فاذا كان ء رمزا للزاوية الواقعة بين اتجاهي الحركة في $ا_١ ا_٢$ ، $ع$ رمزا لاكبر مقادير السرع $ع$ ، $ع_١$ ، $ع_٢$ ، ..... ، $ع_ن$ ، $ا ا_ن = ل$ يكون

$$(ع^٢ + ع_١^٢ + ع_٢^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢)\,\text{حا}^٢\,\text{هـ} < (ن-١)\, ع^٢ \,\text{حا}^٢\,\text{هـ}$$ أو

$$(ع^٢ + ع_١^٢ + ع_٢^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢)\,\text{حا}^٢\,\text{هـ} < ء\,\text{هـ}\, ع^٢ \left(\frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}}\right)^٢$$

وهذا المقدار ينعدم حينما يزيد ن الى ما لا نهاية مع بقاء ء ثابتا وعلى ذلك فمتى آل كثير الأضلاع الى المحنى فالمعادلة (١) تؤول الى

$$ع_ن^٢ = ع^٢ + ٢\,\text{جـ}\, ل$$

وهي المعادلة التي منها تتعين السرعة في اي نقطة من نقط المحنى بدلالة السرعة الابتدائية والارتفاع الرأسي الذي سقط منه المتحرك

وبحذف الرمز ن الموضوع تحت السرعة ع يكون

$$ع^٢ = ع^٢ + ٢\,\text{جـ}\, ل$$

تنبيه ١ - قد فرض فيما تقدم ان المتحرك غير مرن وانه متحرك على تقعير المحنى بتأثير قوة التثاقل وذلك لكي يتحرك المتحرك المذكور ملاصقا للمحنى وقد يترك المتحرك السائر على محنى هذا المحنى في شروط مخصوصة الا ان الفرض المذكور سابقا يمكن توضيحه بتصور ان المضلع $ا_١ ا_٢$ .... عبارة عن انبوبة مضلعة تؤول في النهاية الى انبوبة محنية قطرها الداخل صغير وكاف بالضبط لمرور المتحرك وحينئذ فحالة السير على محنى تكون محققة لان السرعة التي يأخذها المتحرك في اي نقطة تكون مساوية لسرعة متحرك سائر على تقعير المحنى أو تحديبه حيث انها تبقى على الدوام مماسة له

وينتج من ذلك أولا اذا خرج المتحرك من نقطة ا من السكون يكون $ع = ٠$ ، $ع^٢ = ٢\,\text{جـ}\, ل$ اعني ان السرعة المكتسبة لجسم خارج من السكون ومتحرك على محنى أملس يساوي السرعة التي يكتسبها الجسم الساقط بحرية من الارتفاع نفسه وزيادة على ذلك يمكن التعبير عن المعادلة $ع^٢ = ع^٢ + ٢\,\text{جـ}\, ل$ بأن يقال

مربع السرعة في اي نقطة مثل $ا_ن$ يساوي مربع السرعة في اي نقطة أخرى مثل ا زائدا مربع السرعة التي يكتسبها المتحرك بواسطة التثاقل لو خرج من السكون قاطعا المسافة الرأسية عينها وهذه النتيجة

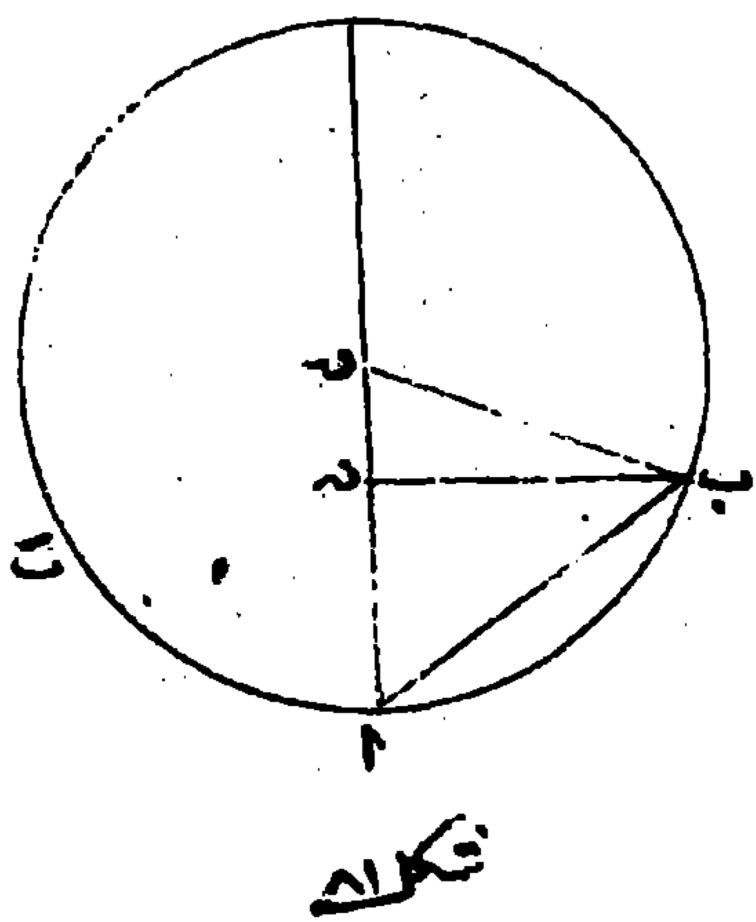
غير

غير متعلقة بشكل المنحنى

وثانيا اذا صعد جسم على منحن فان الارتفاع الرأسى الذى يصل اليه يساوى الارتفاع الرأسى الذى يسقط منه بحيث يكون له عند انتهاء السقوط السرعة التى صعد بها وذلك لأن للجسم فى صعوده تتناقص سرعته بنفس الكيفية التى تتزايد بها فى نزوله فاذا كان ع سرعة المتحرك فى اى نقطة من حركته على المنحنى و عَ سرعته بعد قطع للمسافة الرأسية ل من ابتداء تلك النقطة يكون

عَ٢ = ع٢ ـ ٢ ء ل

وحينئذ اذا كان ب ا ت شكل ١٨ منحنيا موجودا فى مستو راسى و ا أوطى نقطة منه والجزآن ا ب، ا ت متماثلين ومتساويين فأن المتحرك فى نزوله على ب ا يكون له سرعة مساوية للسرعة التى يرتفع فيها الى نقطة ت والسرع التى يأخذها المتحرك فى ارتفاعات متساوية عند صعوده ونزوله تكون متساوية والزمن الكلى للصعود يكون مساويا للزمن الكلى للنزول



شكل ١٨

ومن الواضح انه متى وصل المتحرك الى ت فأنه ينزل ثانيا الى ا ويرتفع الى ب ويستمر على ذلك بمعنى أن الحركة تصير مترددة أى ارتجاجية والزمن اللازم للمرور من ب الى ت يسمى زمن الرجة

وثالثا اذا فرض ان ب ا ت قوس من محيط دائرة نصف قطرها نق ونقطة ا هى أوطى نقطة ا و نصف القطر الرأسى ا ب د خط عمودى على ا و ا ع سرعة المتحرك فى نزوله من السكون من نقطة ب الى أوطى نقطة ا يكون

ع٢ = ٢ء × ا د = ٢ء × اب٢ / ٢نق = ء/نق × اب٢ أو

ع = اب √(ء/نق)

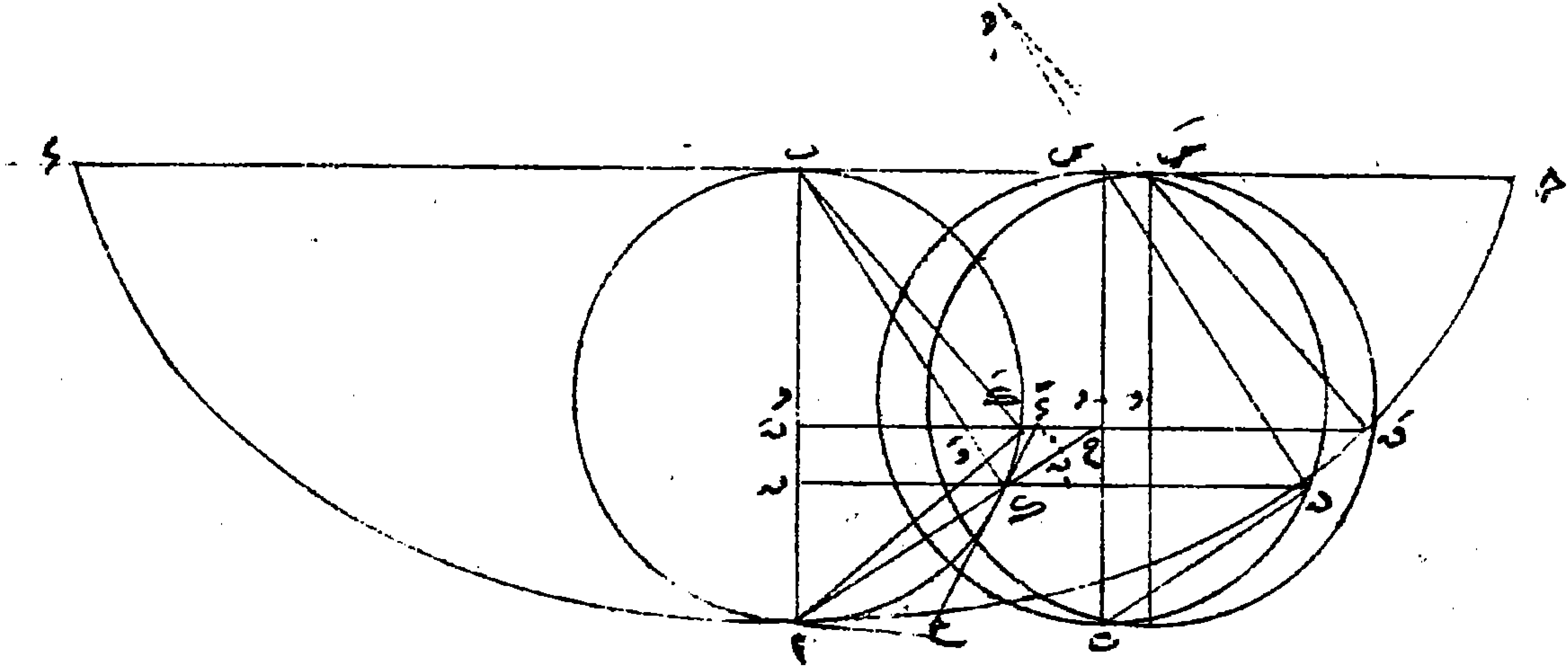
بمعنى ان السرعة فى أوطى نقطة تتغير بالنسبة لوتر قوس النزول

وهذا الأمر يحصل بعينه اذا فرض ان النقطة المادية مربوطة فى طرف حبل غير قابل للتمدد طوله و ا وطرفه الثانى مثبت فى نقطة و

تنبيه ـ الزمن اللازم لسقوط متحرك من السكون من نقطة ب الى أوطى نقطة ا لايبقى ثابتا غالبا بل يتغير بتغير نقطة ب الا انه اذا كان المنحنى سكلويديا فان زمن السقوط الى أوطى نقطة يبقى ثابتا مهما كان وضع النقطة التى يخرج منها المتحرك

وبعبارة أخرى ان زمن الرجة على منحنى سكلويدى محوره رأسى ورأسه أسفل يكون ثابتا مهما كان طول قوس الرجة ولذلك يسمى المنحنى السكلويدى منحنى الازمنة المتساوية وخاصية المنحنى السكلويدى هذه لها أهمية عظمى فى نظرية البناديل وانشائها وسنبرهن عليها الآن الاصوب ان نتكلم اولا على خواص المنحنى السكلويدى فنقول

تعريف ـ اذا تدحرجت دائرة ت ه س التى مركزها و فى مستو واحد على خط مستقيم ح ه ء شكل ٨٩



شكل ٨٩

فأن اى نقطة ثابتة على المحيط ترسم منحنيا ح ه ا ء يسمى منحنيا سكلويديا وحينئذ اذا فرضنا أن ح ه ا ء هو المنحنى المتكون من لفة كاملة للدائرة الراسمة وأن ح ا ء هما النقطتان اللتان فيهما تترك النقطة الراسمة المستقيم ح ء ثم تعود اليه وأن س ه ت هو وضع محيط الدائرة حينما تكون النقطة الراسمة فى ه وأن ب ك ا وضعها حينما تكون النقطة الراسمة على اعظم بعد من ح ء يرى بديهيا أن جزئى المنحنى ا ح ا ء يكونان متساويين ومتشابهين

ثم ان المستقيم ا ب الذى يقطع ح ء بالتعامد عليه يسمى المحور وان ح ء يسمى القاعدة وأن نقطة ا تسمى راس المنحنى السكلويدى

اذا تقرر هذا ورسم مستقيم ه ك ن عموديا على ا ب ووصل ه س ا ه ت يقال حيث ان النقطة الراسمة ه تخرج من ح وان كل نقطة من نقط القوس س ه كانت مماسة للخط ح س فيكون قوس ه س = ح س وحيث ان الخط ح ب مساو لنصف المحيط ب ك ا المساوى لنصف المحيط س ه ت فيكون قوس ه ت = ب س = ه ك حيث ان ه ك مساو ومواز الى ب س

وحينئذ اذا فرضنا أن المحيط يبتدئ فى التدحرج من الوضع ب ك ا ومعه النقطة الراسمة فى ا فمتى وصلت هذه النقطة الى وضع مثل ه يكون قوس ا ك = ب س = ه ك ويكون أيضا

أولا ان ه ت يكون مماسا للمنحنى السكلويدى فى نقطة ه وذلك لأنه متى آتت النقطة الراسمة فى ه فأن الدائرة الراسمة تكون مماسة للخط ح ء فى نقطة س ونقطة س هذه تبقى ساكنة لحظة من الزمن أى انها تصير مركز دوران وقتى والدائرة تدور حينئذ حول نقطة س وعليه فتتحرك نقطة ه فى اتجاه عمودى على س ه أى ان س ه يكون عموديا على المنحنى السكلويدى فى نقطة ه وحينئذ

لخط

فخط ه ت العمودى على س ه يكون هو المماس فى ه

وثانيا طول أى قوس مثل ا ه مبتدئا من الرأس هو ضعف وتر القوس ا ك المقطوع بالخط الافقى ه ك ه وذلك لانه اذا كان ه ك ه افقيا قريبا جدا من ه ك ه فنرسم ا ع ا ع ك مماسين للدائرة فى ا ك فيكون ا ع موازيا للقاعدة وموازيا أيضا الى ه ك ه ثم نمد ع ك ا ك حتى يتقابلا مع ه ك ه فى نقطتى ع ا ع ونمد ع ه عموديا على ك ع

وحينئذ بسبب ان ا ع ا ع ك مماسان لدائرة واحدة فتكون زاوية ع ك ا = زاوية ع ا ك ولكن زاوية ع ك ا = الزاوية المقابلة لها ع ك ع وكانت زاوية ع ع ك = زاوية ع ا ك فاذن تكون زاوية ع ك ع = زاوية ع ع ك وعليه يكون ع ك = ع ه ولكن اذا اصغر القوس ك ك بقدر ما يراد فانه يميل لأن يتحد مع المماس ك ع وعند النهاية يكون مساويا له وعليه يكون

ع ه عند النهاية قوسا صغيرا من محيط دائرة مركزه ا ونصف قطره ا ك أعنى أن ا ك ا ك ه يقدر بهما عند النهاية زيادة الوتر ا ك

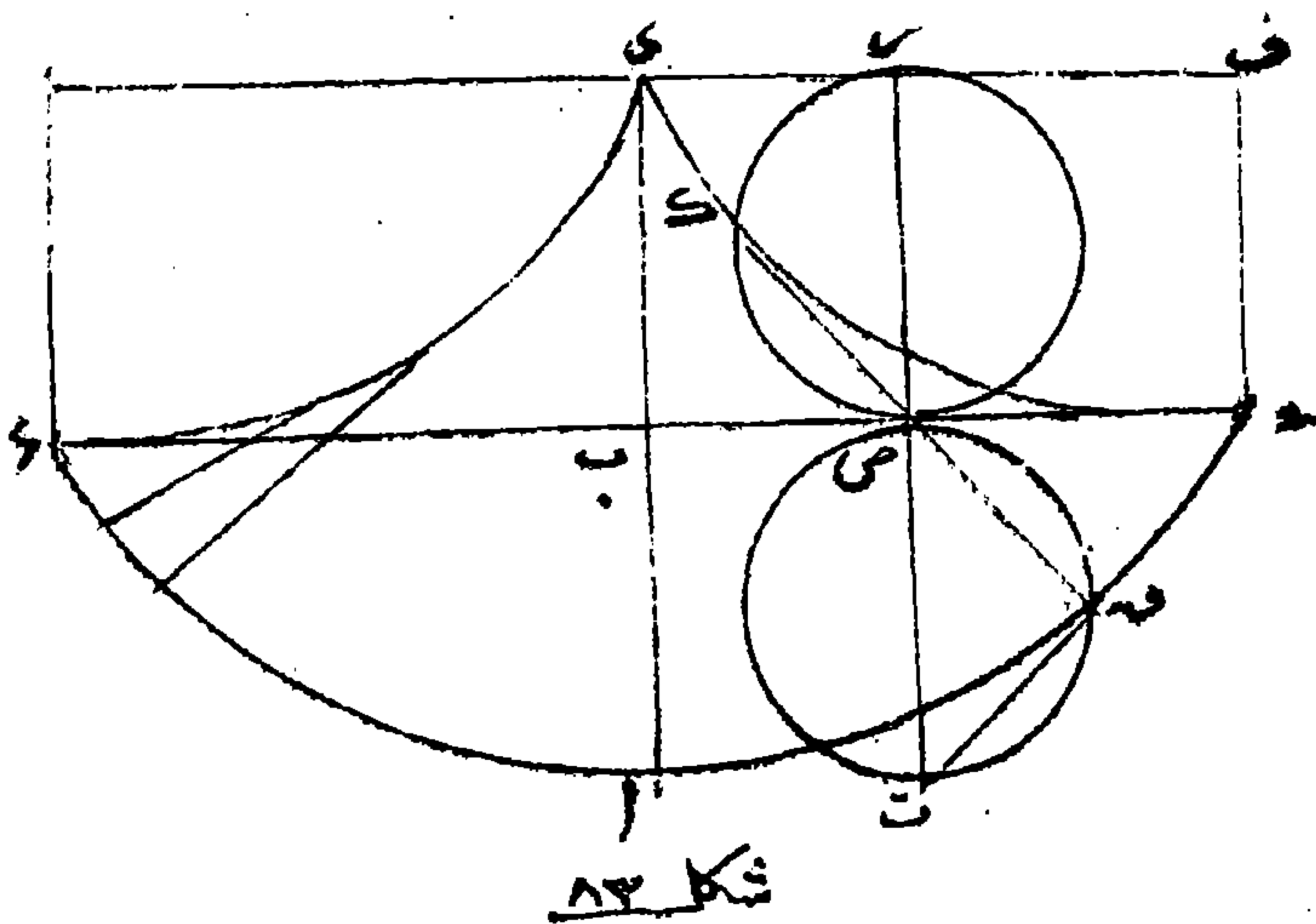
وكذا حيث ان ك ع موازٍ للماس لمنحنى السكلويدى فى نقطة ه فيكون عند النهاية مساويا للقوس ه ه واذن تكون الزيادة ه ه للقوس السكلويدى عند النهاية ضعف الزيادة المقابلة لها للوتر ا ك

وحيث ان القوس ا ه والوتر ا ك ممتدان من نقطة ا فبناء على ما ذكر يكون القوس ا ه مساويا الى ضعف الوتر ا ك أو ضعف ت ه

وينتج من ذلك أولا حيث ان $\overline{اك}^2 = اد \times ا س$ فيكون $اه = ٢\sqrt{اس \times اد}$

وثانيا يكون القوس $اح = ٢ اس$

لاجل انشاء بندول يرتج فى منحنى سكلويدى معين نفرض ان ا س شكل ٨٣ هو المحور لاحد قاعدة السكلويد المعلوم ونفرض أيضا أن ى ح



شكل ٨٣

نصف منحنى سكلويدى مساو بالضبط الى ى ا ورأسه فى نقطة ح وقاعدة ى ف موازية الى س ح وأن ى ا نصف سكلويد آخر مساو الى ح ا ورأسه فى نقطة ى وقاعدته موازية الى ى س

ثم نفرض كذلك ان ر ك ص ا ص ه ت وضعان ايكانا للدائرتين الراسمتين للمنحنيين ومتماستين معا فى نقطة ص وأن ك ا ه وضعا النقطتين الراسمتين ونصل ك ص ا ص ه فيكون قوس ه ص = ص ح = ر ف = قوس ص ك

وبسبب تساوى الدائرتين تكون الزاويتان ده ح ا ك ص ب متساويتين وعليه يكون ده ك خطا مستقيما

ولكن ك ص مماسا للمنحنى ى ك ح فى نقطة ك ا ده عمودى للمنحنى ح ده ؟ فى نقطة ده وايضا فأن القوس ح ك يساوى ضعف الوتر ك ص = ده ك

وحينئذ اذا فرض خيط طوله يساوى طول نصف المنحنى السكلويدى ى ك ح وثبت احدى نهايتيه فى نقطة ى وكان ملازما دائما للمنحنى السكلويدى ى ك ح بحيث يكون ممتدا ودا وغير قابل للتمدد فيكون على الدوام مماسا للمنحنى السكلويدى المذكور ونهايته الأخرى ترسم المنحنى السكلويدى ح ؟

وحينئذ فيتحصل هذه الطريقة العملية لانشاء بندول يرتج على منحنى سكلويدى وهى

انه اذا فرض نصفا منحنيين سكلويدين ماديين ى ك ح ا ى ء شكل ٨٢ موضوعين بحيث يكون لهما مماس مشترك فى نقطة ى وفرض انه ثبت فى نقطة ى طرف خيط رفيع طوله مساو لطول نصف المنحنى السكلويدى ى ك ح وربطت بالنهاية الأخرى ده للخيط المذكور نقطة مادية فهذه النقطة ترتج فى المنحنى السكلويدى ح ا ء بحيث ان الخيط المذكور يحل من على ى ح حينما ترسم نقطة ده المنحنى ح ؟ ثم يلتف من نفسه على ى ء حينما ترسم النقطة المذكوره المنحنى ا ء وهكذا

نصف قطر الانحناء فى اى نقطة مثل ده من المنحنى السكلويدى يساوى ده ك = ٢ ده ص = ضعف العمودى على المنحنى فى النقطة المذكورة كما هو واضح من شكل ٨٢

ومع ذلك فيمكن الوصول الى ذلك مباشرة بواسطة شكل ٨٢ لانه اذا وصل ب ك ا ب كَ فالمستقيم الأول يقطع ا كَ فى نقطة وَ ثم ان المستقيمين ده س ا دَه سَ العمودين للمنحنى فى نقطتى ده ا دَه يتقاطعان فى نقطة و التى هى مركز الانحناء فى نقطة ده وحيث ان ده و ا دَه و موازيان على التناظر الى ب ك ا ب كَ وأن ده دَه = ٢ × كَ وَ عند النهاية فيكون

ده و = ٢ ب وَ = ٢ ب ك = ٢ ده س عند النهاية

أعنى ان نصف قطر الانحناء يساوى ضعف الخط العمودى

لايجاد الزمن الذى فيه تنزل نقطة مادية على منحنى سكلويدى معكوس يقال

نفرض ان ع شكل ٨٤ هى النقطة التى يخرج منها المتحرك من السكون وان ع هـ خط افقى يقابل محور السكلويد ا ب فى نقطة هـ ثم نرسم على ا هـ محيط دائرة ولكن ده دَه ا دَه دَه احداثيى نقطتين قريبتين من بعضهما ويقابلان هذا المحيط فى نقطتى ك ا كَ ثم نصل هـ ك ا هـ كَ ا ا ك فالخط الأخير يقطع هـ كَ فى نقطة ت وحينئذ يكون

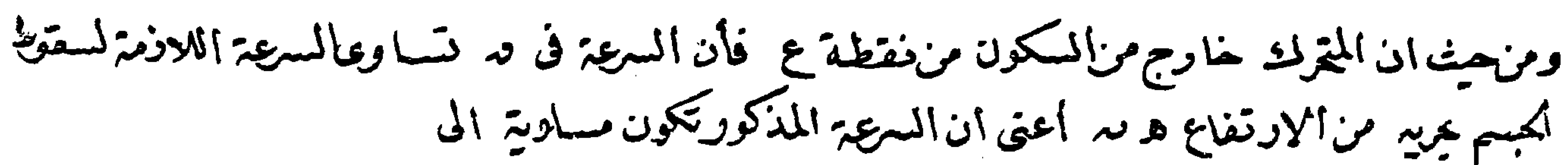
قوس ا ده = ٢ $\sqrt{٢ ب \times ٢ ده}$ = ٢ $\sqrt{\frac{٢ ب \times ٢ كَ^2}{٢ هـ}}$ = ٢ ا ك $\sqrt{\frac{٢ ب}{٢ هـ}}$

وبمثل ذلك يكون

قوس ا دَه = ٢ ا كَ $\sqrt{\frac{٢ ب}{٢ هـ}}$ واذن يكون

ده دَه =

ده دَه = ٢ (اك − اكَ) √(اب / ٢اهـ)



شكل ٩٤

ومن حيث ان المتحرك خارج من السكون من نقطة ع فأن السرعة فى ده تساوى السرعة اللازمة لسقوط الجسم حرية من الارتفاع هـ ده اعنى ان السرعة المذكورة تكون مساوية الى

√(٢جـ × هـ ده) = √(٢جـ × هـ ك٢ / ٢اهـ) = هـ ك √(جـ / ٢اهـ)

وحيث ان ده دَه صغيرة جدا فأن سرعة المتحرك اثناء قطع المسافة المذكورة تكون قريبة الانتظام جدا ومساويا السرعة فى نقطة ده وكلما كان مقدار ده دَه صغيرا كلما قرب هذا الفرض من الصحة وبناء على هذا الفرض يمكن جعل اك − اكَ = تَ ك حيث ان اكَ تَ = ٩٠° ، اتَ = اكَ عند النهاية وعليه يكون اك − اكَ = تَ ك واذن يكون الزمن اللازم لقطع المسافة ده دَه = قوس ده دَه / السرعة فى ده عند النهاية أو أن الزمن المذكور يساوى

٢ (اك − اكَ) √(اب / ٢اهـ) ÷ هـ ك √(جـ / ٢اهـ) = ٢تَ ك / هـ ك √(اب / ٢جـ) = ضعف زاوية ك هـ كَ √(اب / ٢جـ)

حيث ان تَ ك / هـ ك = التقدير الدائرى لزاوية ك هـ كَ عند النهاية اعنى ان الزمن اللازم لقطع اى قوس صغير مثل ده دَه يتغير تبعا للتقدير الدائرى لزاوية ك هـ كَ

وحينئذ اذا جمعنا الازمان الصغيرة المتتالية المبتدئة من نقطة ع يحصل الزمن اللازم لقطع المسافة ع ده ولكن مجموع الزوايا المقابلة للزمن المذكور هو زاوية ع هـ ك وحينئذ فزمن قطع المسافة

ع ده = زاوية ع هـ ك √(٢اب / جـ)

وينتج من ذلك أولا حينما تأتى ده فى ا فان الزاوية ع هـ ك تصير ع هـ ا = ط/٢ واذن فزمن قطع المسافة من ع الى ا يساوى ط/٢ √(٢اب / جـ)

وبعد ان يأتى المتحرك فى ا يصعد على النصف الآخر اى من المنحنى السكلويدى الى أن يصل الى نقطة غَ بحيث يكون اغَ = اع وزمن الصعود على اغَ يكون مساويا الى زمن النزول على اع وعليه يكون زمن الرجة الكاملة من ع الى غَ مساويا الى

ط √(٢اب / جـ)

وثانيا حيث ان زمن الرجة فى المنحنى السكلويدى لا يتعلق بوضع النقطة التى تبتدى منها الحركة فأن الزمن

يكون ثابتا مهما كان مقدار قوس الرجة وبعبارة أخرى ان المنحنى السكلويدى هو منحنى الازمنة المتساوية

وثالثا اذا وضع منحنيان سكلويديان ى ح ، ا ى و شكل ٤٨ متماسان معا فى نقطة ى بحيث يكون المماس المشترك رأسيا ثم ثبت طرف خيط مساو لطول احدهما فى نقطة ى وربط فى الطرف الآخر نقطة مادية فأن هذه النقطة ترتج فى المنحنى السكلويدى ح ا ء بنفس الكيفية التى ترتج بها نقطة مادية مطلقة على منحنى سكلويدى مادى ح ا ء

فاذا كان ل رمزا لطول الخيط المذكور أعنى لطول البندول يكون ل = ا ى = ٢ ا ب ويكون زمن الرجة من سكون الى آخر مساويا الى $\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$

واذن ففى المحل الواحد من سطح الأرض يتغير زمن الرجة بالنسبة لجذر طول البندول اى بالنسبة الى $\sqrt{\text{ل}}$

ورابعا اذا أخذ جزء صغير جدا من المنحنى السكلويدى من ابتداء ا شكل ٤٧ فنرى ان هذا الجزء يتحد بتقريب كاف مع جزء من الدائرة المارة بنقطة ا التى نصف قطرها ا ى ومركزها نقطة ى

وحينئذ اذا ارتج بندول طوله ل على قوس دائرى ذى سعة صغيرة جدا وكافية لحصول الرجة فأن زمن الرجة يساوى

$$\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$

وخامسا اذا كان ل رمزا لطول بندول الثوانى اى البندول الذى يمر من السكون الى السكون فى ثانية ، لَ رمزا لطول بندول يرتج رجة واحدة فى ثوانى عددها ن اى زمن رجة ن من الثوانى يكون

$$١ = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \quad ، \quad \text{ن} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{لَ}}{\text{ج}}}$$

ومنها يحدث $\quad \text{لَ} = \text{ن}^{٢}\,\text{ل}$

طول بندول الثوانى ـ طول بندول الثوانى فى عرض لندره وجد بالتجربة انه يساوى ٣٩ر١٣٨٦ بوصة ومن مقدار الطول ل هذا يمكن ايجاد مقدار عجلة التثاقل لأن

$$١ = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \qquad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{ج} = \text{ط}^{٢}\,\text{ل} = ٣٨٦ر٠٨ \ \text{بوصة} = ٣٢ر١٩ \ \text{قدم}$$

وينتج من ذلك انه اذا كان ج ، جَ عجلتى التثاقل فى محلين مختلفين ا ، ب من سطح الأرض فيهما يرتج البندول رجات (اى يدق دقات) عددها ن ، نَ على التناظر فى زمن معين فمن السهل المقارنة بين ج ، جَ بدلالة ن ، نَ

وذلك لأنه اذا كان ز هو الزمن المعلوم يكون

$$\frac{\text{ز}}{\text{ن}} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \quad ، \quad \frac{\text{ز}}{\text{نَ}} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{جَ}}}$$

ومنها يحدث

$$\left(\frac{\text{نَ}}{\text{ن}}\right)^{٢} = \frac{\text{جَ}}{\text{ج}} \qquad \text{أو}$$

$$\frac{\text{جَ}-\text{ج}}{\text{ج}} = \frac{\text{نَ}^{٢}}{\text{ن}^{٢}} - ١ = \frac{\text{نَ}^{٢}-\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}} = \frac{\text{نَ}-\text{ن}}{\text{ن}} \times \frac{\text{نَ}+\text{ن}}{\text{ن}} = ٢ \times \frac{\text{نَ}-\text{ن}}{\text{ن}}$$ تقريبا اذا كان نَ ـ ن صغيرا جدا بالنسبة الى ن

الى ن

اذا أخذ بندول الثوانى الى قمة جبل ارتفاعه هـ وكان المطلوب ايجاد مقدار عدد الدقات التى يفقدها هذا البندول فى يوم بقال

نفرض ان عجلة التثاقل تتغير على حسب عكس مربع البعد من مركز الأرض ونرمز لنصف قطر الارض بالرمز نق ولعجلتى التثاقل فى سطح الجبل وفى قمته بالرمزين جـ ، جَ على التناظر وحينئذ يكون

$$جَ = جـ \times \frac{نق^2}{(نق + هـ)^2}$$

فاذا كان ز ، زَ هما زمنا الرجة فى سطح الجبل وفى قمته على التناظر يكون

$$ز = ط\sqrt{\frac{ل}{جـ}} \quad ، \quad زَ = ط\sqrt{\frac{ل}{جَ}}$$

واذا كان ن ، نَ عدد الدقات فى زمن واحد فى سطح الجبل وفى قمته على التناظر يكون

$$ن\, ز = نَ\, زَ$$ ومنها يحدث

$$\frac{ن}{نَ} = \frac{زَ}{ز} = \sqrt{\frac{جـ}{جَ}} = \frac{نق + هـ}{نق} = ١ + \frac{هـ}{نق}$$ أو

$$\frac{ن - نَ}{ن} = ١ - \frac{١}{١ + \frac{هـ}{نق}} = \frac{هـ}{نق}$$ تقريبا

فاذا كان هـ = ميلا واحدا ، نق = ٤٠٠٠ ميل ، ن = ٢٤ × ٦٠ × ٦٠ يكون

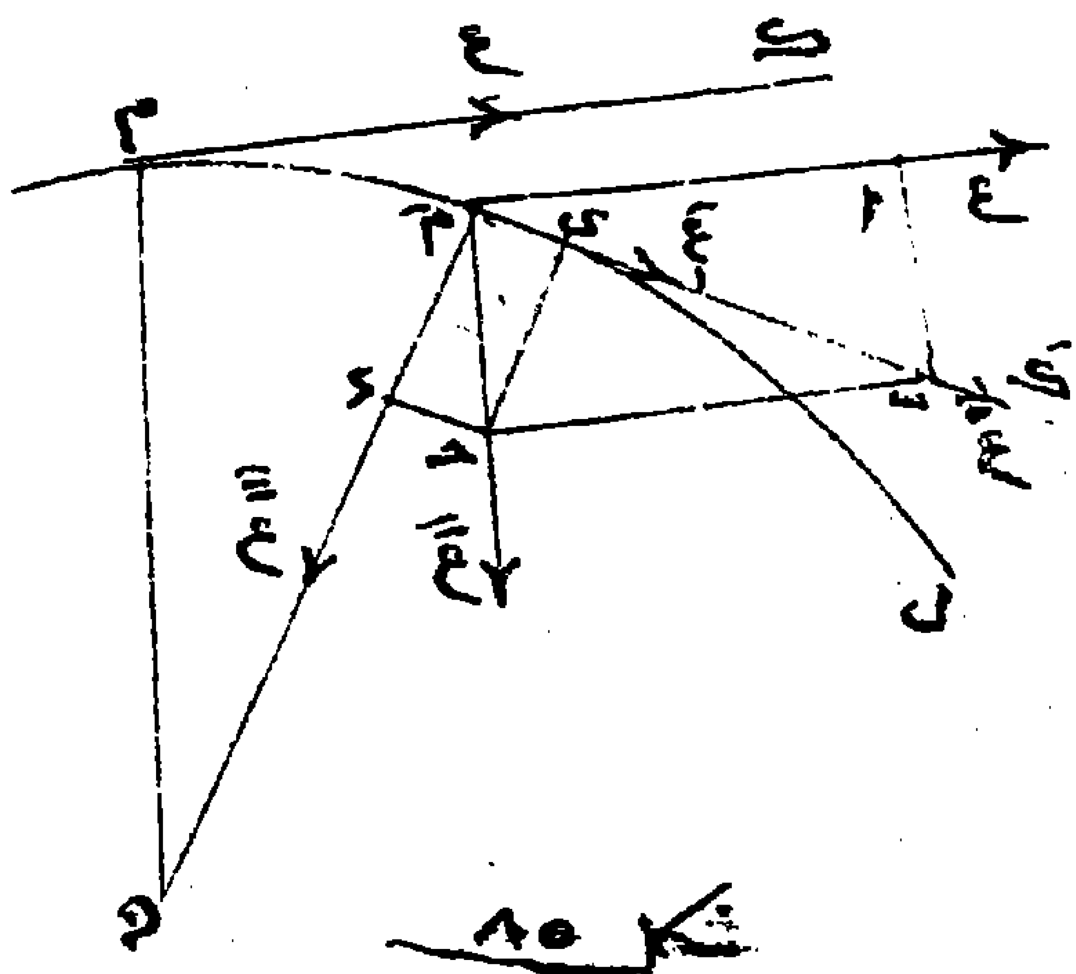
$$ن - نَ = \frac{٢٤ \times ٦٠ \times ٦٠}{٤٠٠٠} = ٢١٫٦$$

أعنى بندول الثوانى يفقد فى هذه الحالة نحو ٢١٫٦ دقة فى ٢٤ ساعة

فى العجلة المماسة والعمودية والكلية فى التحرك المنحنى

متى كان تحرك نقطة منحنيا فاتجاه سرعتها يتغير فى كل لحظة فضلا عن تغير مقدارها وحينئذ يقتضى ان نعتبر خلاف العجلة فى اتجاه المماس التى تسمى بالعجلة المماسة عجلة اخرى فى اتجاه الخط العمودى تسمى بالعجلة العمودية ثم عجلة ثالثة تسمى بالعجلة الكلية ولنوضح ذلك فنقول

اذا فرض ان م ، مَ شكل ٨٥ وضعان متتاليان قريبان جدا من بعضهما للمتحرك على خط سيره م ل مطابقان للزمنين ز ، زَ اللذين لا يفترقان عن بعضهما الا بمقدار يسير جدا ورمزنا لسرعة المتحرك فى الوضع م على اتجاه المماس م ك بالرمز ع ولسرعته فى الوضع مَ على اتجاه المماس مَ كَ بالرمز عَ فيمكن تحليل السرعة عَ الى سرعتين بحيث تكون احداها مساوية وموازية للسرعة ع ولتكن السرعة الأخرى مَ هـ = عً



شكل ٨٥

ثم نحلل السرعة عً الى سرعتين احداها على اتجاه المماس مَ كَ ولتكن مَ ى = عَ والأخرى على اتجاه الخط العمودى

مَ ن للمنحنى فى نقطة مَ ولكن مَ ء = ع″

وحيث ان زاوية ا م ب أو مَ ب حـ صغيرة جدا بقدر ما يراد بسبب قرب نقطة مَ من نقطة م بقدر ما يراد فالخط العمودى حـ ى لا يفرق الا بمقدار صغير جدا بقدر ما يراد عن قوس الدائرة الذى مركزه ب ونصف قطره ب حـ وحينئذ يكون ب ى = ب حـ = مَ ٢ = ع

ولكن مَ ب = ب ى + مَ ى من الشكل حينئذ يكون

$$مَ ب = عَ = ع + ع′$$

واذا رمزنا للزمن الصغير جدا الذى هو الفرق بين ز ، زَ بالرمز ΔZ يكون

$$\frac{ع′}{ΔZ} = \frac{عَ - ع}{ΔZ}$$ وبأخذ نهاية الطرفين يكون

$$نها \frac{ع′}{ΔZ} = نها \frac{عَ - ع}{ΔZ}$$

أعنى أن $نها \frac{ع′}{ΔZ}$ عبارة عن النهاية التى تميل اليها النسبة بين ازدياد السرعة المماسة وبين ازدياد الزمن ΔZ المستعمل لحصول هذه الزيادة وهى ما تسمى بالعجلة المماسة

وحينئذ فالنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{ع″}{ΔZ}$ تسمى بالعجلة العمودية والنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{ع‴}{ΔZ}$ تسمى بالعجلة الكلية أى ان

$نها \frac{ع′}{ΔZ}$ تسمى بالعجلة المماسة ،

$نها \frac{ع″}{ΔZ}$ تسمى بالعجلة العمودية ،

$نها \frac{ع‴}{ΔZ}$ تسمى بالعجلة الكلية

الارتباط الواقع بين العجلة المماسة والعمودية والكلية

أولا من حيث ان العجلة المماسة هى نهاية نسبة ازدياد السرعة ع على ازدياد الزمن ΔZ فتكون هى المشتقة برتبة أولى للسرعة بدلالة الزمن

ويفهم من ذلك ان العجلة المماسة فى التحرك المنحنى هى عين العجلة فى التحرك المستقيم

وثانيا اذا كان م ن هو العمودى للمنحنى فى نقطة م فمثلث م مَ ن يمكن اعتباره كمثلث مستقيم الاضلاع وحينئذ يكون مثلث حـ ى ب مشابها لمثلث م مَ ن بسبب تعامد اضلاعهما ومنها يحدث

حـ ى : ى ب :: م مَ : مَ ن ومنه يحدث

$$\frac{حـ ى}{ΔZ} = ع \times \frac{م مَ}{ΔZ} \div مَ ن$$ أو

$$نها \frac{حـ ى}{ΔZ} = ع \; نها \left(\frac{م مَ}{ΔZ} \div مَ ن \right)$$

ولكن عند النهاية $\frac{م مَ}{ΔZ} = ع$ ، مَ ن يؤول الى ما يسمى بنصف قطر الانحناء الذى نرمز له بالرمز غ

وحينئذ يكون

$$نها \frac{حـ ى}{ΔZ} = \frac{ع^2}{غ}$$

وحيث ان

وحيث ان نها $\frac{ح ى}{ء ن}$ = نها $\frac{م ى}{ء ن}$ = نها $\frac{ء عً}{ء ن}$ = العجلة العمودية فاذا رمز للعجلة العمودية المذكورة بالرمز و يكون

$$و = \frac{ع^٢}{ح}$$

اعني ان العجلة العمودية تساوى خارج قسمة مربع سرعة المتحرك على نصف قطر انحناء خط السير

وثالثا من مثلث م ح ى القائم الزاوية فى ى يحدث

$$\overline{م ح}^٢ = \overline{م ى}^٢ + \overline{ح ى}^٢ \quad \text{أو}$$

$$\left(\frac{م ح}{ء ن}\right)^٢ = \left(\frac{م ى}{ء ن}\right)^٢ + \left(\frac{ح ى}{ء ن}\right)^٢$$

وبأخذ نهاية الطرفين يحدث

$$نها\left(\frac{م ح}{ء ن}\right)^٢ = نها\left(\frac{م ى}{ء ن}\right)^٢ + نها\left(\frac{ح ى}{ء ن}\right)^٢ \quad \text{أو}$$

$$نها\left(\frac{ء عً}{ء ن}\right)^٢ = نها\left(\frac{ء ع}{ء ن}\right)^٢ + نها\left(\frac{ء عً}{ء ن}\right)^٢ \quad \text{ولكن}$$

حيث ان نها$\left(\frac{ء عً}{ء ن}\right)^٢$ عبارة عن مربع العجلة الكلية ، نها$\left(\frac{ء ع}{ء ن}\right)^٢$ عبارة عن مربع العجلة المماسة ونها$\left(\frac{ء عً}{ء ن}\right)^٢$ عبارة عن مربع العجلة العمودية فحينئذ اذا رمزنا للعجلة الكلية بالرمز ك وللعجلة المماسة بالرمز و يكون

$$ك^٢ = و^٢ + و^٢$$

أعنى ان العجلة الكلية يمكن حسابها كوتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعين المحيطين بالقائمة العجلة المماسة والضلع الآخر العجلة العمودية

وينتج من ذلك اولا حينما تكون العجلة العمودية معدومة فالعجلة الكلية تساوى العجلة المماسة ولكن حيث كانت العجلة العمودية تساوى $\frac{ع^٢}{ح}$ فحينئذ انعدامها لايقع الا اذا كانت السرعة ع معدومة بالكلية أعنى انه لا يوجد تحرك أصلا أو ان نصف قطر الانحناء ح يكون مقداره الى ما لا نهاية له أعنى ان خط السير يكون خطا مستقيما وحيث انه لايجوز انعدام السرعة بوجود الحركة فحينئذ انعدام العجلة العمودية يدل على أن خط السير مستقيم

وثانيا حينما تكون العجلة الكلية ثابتة المقدار والاتجاه فخط السير يكون قطعا مكافئا لأنه اذا اعتبرنا اتجاه السرعة الابتدائية ع محور السينات واتجاه العجلة الكلية محور الصادات فبفرض انعدام العجلة الكلية المذكورة يتحرك المتحرك على اتجاه محور السينات تحركا منتظما ويكون

$$س = ع ن$$

واذا كان الأمر بالعكس بأن كانت العجلة الكلية هى الموجودة فقط فالمتحرك يتحرك على اتجاه محور الصادات تحركا منتظم العجلة ويكون

$$ص = \frac{١}{٢} ك ن^٢$$

وبوجود هاتين الحركتين فى آن واحد بسبب وجود السرعة الابتدائية والعجلة الكلية معا يمكن

لحصول على خط السير بحذف ز من المعادلتين المذكورتين وحينئذ يحدث

$$ص = \frac{ك}{٢ع^٢} \times س^٢$$

وهي معادلة قطع مكافئ منسوب الى المماس والى القطر الذى يمر بنقطة التماس

الضغط على المحنى — اذا تحركت نقطة مادية على محنى سكلويدى محوره رأسى شكل ٨٣ بتأثير التثاقل وكان المطلوب ايجاد الضغط على المحنى المذكور يقال

اذا فرض ان م هو جسم المتحرك السائر على تقعير المحنى وان ر هو رد الفعل او الضغط الذى يحدثه المحنى المادى على المتحرك المذكور فى جهة التقعير المساوى للضغط الذى يحدثه ذلك المتحرك على المحنى فى الجهة المضادة يكون $\frac{ر}{م}$ هو العجلة الناشئة عن هذا الضغط واذا رمزنا بالرمز ﻫ للزاوية التى يكونها العمودى للسطح مع الخط الرأسى لنرحيث ان قوة التثاقل تؤثر الى أسفل فيكون ح حا ﻫ هى محللة عجلة التثاقل المؤثرة فى اتجاه ﻫ ك ، $\frac{ر}{م}$ ـ ح حا ﻫ هو مقدار العجلة الكلية المؤثرة فى اتجاه العمودى للسطح ولكن من حيث ان المقدار المذكور عبارة عن العجلة العمودية التى مقدارها بموجب ما تقدم هو $\frac{ع^٢}{ح}$ فيكون

$$\frac{ع^٢}{ح} = \frac{ر}{م} - ح حا ﻫ$$ ومنها يحدث

$$ر = م \left(\frac{ع^٢}{ح} + ح حا ﻫ \right)$$

وهى المعادلة المطلوبة التى يتعين منها مقدار الضغط على المحنى

وينتج من ذلك أولا اذا رسم المتحرك محنيا سكلويديا بربطه بخيط كما تقدم فشدة الخيط الواقعة على المتحرك تكون مساوية للضغط على المحنى اى ان شدة الخيط فى اى وضع مثل ى ك ﻫ شكل ٨٢ تكون مساوية الى $م \left(\frac{ع^٢}{ح} + ح حا ﻫ \right)$

وثانيا اذا تحرك متحرك على محنى ما بتأثير أى قوة وكان ص رمز المحللة العجلة فى اتجاه العمودى على السطح معتبرة موجبة فى جهة التقعير فبناء على ما تقدم يكون

$$ر = م \left(\frac{ع^٢}{ح} - ص \right)$$

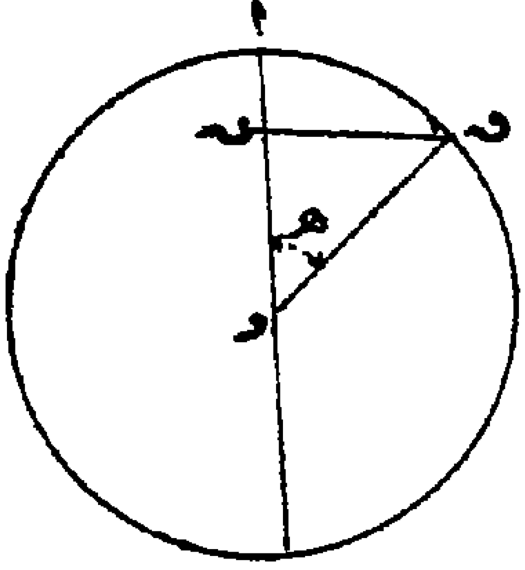
وثالثا حيث ان المحنى يحدث قوة دفع فقط على المتحرك فاذا صار مقدار ر سالبا فى حالة ما (بمعنى ان المحنى يحدث قوة جذب) فان المتحرك يترك المحنى فى النقطة التى فيها ر = ٠ . لانه متى مر الجسم من هذه النقطة فان مقدار ر تتغير اشارته من الايجاب الى السلب

فاذا كان المتحرك مارا فى انبوبة محنية قطرها الداخل صغير جدا بدلا من تحركه على محنى بسيط فان اتجاه الضغط الذى تحدثه الانبوبة على المتحرك يتغير فى نقطة مثل النقطة السابقة بمعنى انه اذا كان المتحرك فى احد جانبى النقطة فان الضغط يؤثر فى جهة تقعير المحنى واذا كان المتحرك فى الجهة الاخرى من النقطة المذكورة فان الضغط يؤثر فى جهة تحديب المحنى وبالعكس

ولنوضح

ولنوضح القواعد المتقدمة بالمسألتين الآتيتين فنقول

المسألة الأولى ـ متحرك نازل من السكون على قوس من دائرة رأسية ملسا والمطلوب معرفة الوضع الذى يترك فيه المتحرك المذكور تلك الدائرة



شكل ٨٦

لذلك نفرض ان ع هى سرعة المتحرك فى وضع ما مثل د شكل ٨٦ حينما ينزل على الدائرة وأن و ا هو اتجاه القطر الرأسى ا و هو المركز ا ه هو نصف القطر الرأسى ثم نمد د ه أفقيا ونفرض ان زاوية د و ا = هـ وان ر هو الضغط الحادث من المحيط على المتحرك المائل لابعاد المتحرك المذكور عن نقطة و وحينئذ يكون

$$ع^٢ = ٢ ء × ا ه$$

حيث أن المتحرك خارج من السكون من نقطة ا ومن حيث ان نصف قطر الانحناء واحد فى كل نقطة ويساوى نق فيكون $\frac{ع^٢}{نق}$ هو مقدار العجلة فى نقطة د فى الاتجاه د و ولكن حيث ان ء حا هـ هو محللة عجلة التثاقل فى الاتجاه د و فيكون ء حا هـ ـ $\frac{ر}{م}$ هى العجلة الكلية للمتحرك الحاصلة فى الاتجاه د و وحينئذ

$$\frac{ع^٢}{نق} = ء حا هـ - \frac{ر}{م} \quad \text{ومنها يكون}$$

$$ر = م \left(ء حا هـ - \frac{ع^٢}{نق} \right)$$

وحيث ان $ع^٢ = ٢ ء × ا ه = ٢ ء نق (١ - حا هـ)$ فيكون

$$ر = م ء (٣ حا هـ - ٢)$$

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار الضغط فى أى نقطة مثل د ومتى كان حا هـ أكبر من $\frac{٢}{٣}$ يكون ر موجبا ويبقى المتحرك مماسا للمحنى ولكن متى زاد هـ بحيث يصير حا هـ أصغر من $\frac{٢}{٣}$ فأن ر يصير سالبا ويلزم ان يحدث عن المحنى قوة جذب لكى يبقى المتحرك ملاصقا له وحينئذ ففى النقطة التى فيها حا هـ = $\frac{٢}{٣}$ تتغير اشارة ر من الايجاب الى السلب ويترك المتحرك المحنى ولكن فى النقطة التى فيها حا هـ = $\frac{٢}{٣}$ يكون ا ه = $\frac{نق}{٣}$

وبعد ان يترك المحنى المذكور يبتدى فى رسم محنى قطع مكافئ

المسألة الثانية ـ متحرك يدور فى مستو رأسى مربوط فى طرف خيط غير من طرفه الآخر ثابت والمطلوب ايجاد مقدار الشد الواقع على الخيط المذكور فى وضع ما وتعيين الشروط اللازمة لأجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا

لذلك نفرض ان و شكل ٨٦ هى الطرف الثابت للخيط الذى طوله = نق ا د وضع المتحرك حينما يكون الخيط د و صانعا مع الرأسى و ا زاوية قدرها هـ وحينئذ يكون

$$ا ه = نق (١ - حا هـ)$$

وإذا فرض أن ش رمز لشد الخيط حينما يكون المتحرك في نقطة ه وأن ع، ع هما السرعتان حينما يكون المتحرك في ا وه على التناظر يكون

$$ع'^{2} = ع^{2} + ٢ح \times اد = ع^{2} + ٢ح\,نق\,(١ - حتا\,هـ)$$

وحيث ان عجلة شد الخيط في الاتجاه ه و هي $\frac{ش}{م}$ وعجلة عجلة التثاقل في الاتجاه ه و المذكور هي ح حتا هـ فيكون $\frac{ش}{م}$ + ح حتا هـ هو مقدار العجلة الكلية في اتجاه ه و وعليه يكون

$$\frac{ش}{م} + ح\,حتا\,هـ = \frac{ع'^{2}}{نق} = \frac{ع^{2}}{نق} + ٢ح\,(١ - حتا\,هـ)$$

ومنها يحدث

$$ش = م\left[\frac{ع^{2}}{نق} + ح\,(٢ - ٣\,حتا\,هـ)\right]$$

وهي المعادلة التي يتعين منها مقدار شد الخيط في اي وضع كان

ويرى من ذلك ان مقدار ش يكون نهاية صغرى حينما يكون حتا هـ = ١ اعني حينما تكون هـ = ٠ أي عندما تكون نقطة ه في نقطة ا ثم يأخذ مقدار ش في الازدياد بازدياد هـ الى ان تكون هـ = ط اي حينما يكون المتحرك في أوطى نقطة وحينئذ يكون مقدار ش نهاية عظمى

ولاجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا يجب ان لا يكون شد الخيط سالبا ابدا اذ ان في هذه الحالة يكون الخيط غير مشدود فاذا جعلنا أصغر مقادير ش مساويا للصفر اي جعلنا ش = ٠ حينما يكون هـ = ٠ يكون

$$\frac{ع^{2}}{نق} + ح\,(٢ - ٣) = ٠$$ ومنها يحدث

$$ع^{2} = ح\,نق \quad او \quad ع = \sqrt{ح\,نق}$$

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار السرعة الأصغر ما يمكن للمتحرك في وضعه الأعلى ما يكون حتى يمكن ان يرسم محيطا كاملا

وحيث ان السرعة الاكبر ما يمكن تكون في النقطة السفلى فاذا كان $ع = \sqrt{ح\,نق}$ يكون مقدار السرعة العظمى مساويا الى $\sqrt{٥\,ح\,نق}$

وعلى هذا تكون المعادلة التي يتعين منها مقدار شدة الخيط هي $ش = ٣م\,ح\,(١ - حتا\,هـ)$

وحيث ان النهاية العظمى لهذا المقدار تحقق حينما يكون حتا هـ = −١ اعني حينما يكون المتحرك في أوطى نقطة فتكون قوة الشد في هذه الحالة مساوية الى

$$٦م\,ح = ٦ \times ثقل\ المتحرك$$

وبناء على ما ذكر يرى انه لاجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا يلزم تحقق الشرطين الآتيين

أولا ان لا تكون السرعة في أوطى نقطة اصغر من $\sqrt{٥\,ح\,نق}$

وثانيا ان الخيط يمكن ان يحتمل شدا مساويا لستة امثال ثقل المتحرك على الأقل

طريقة نوتون لتعيين مرونة الكرات

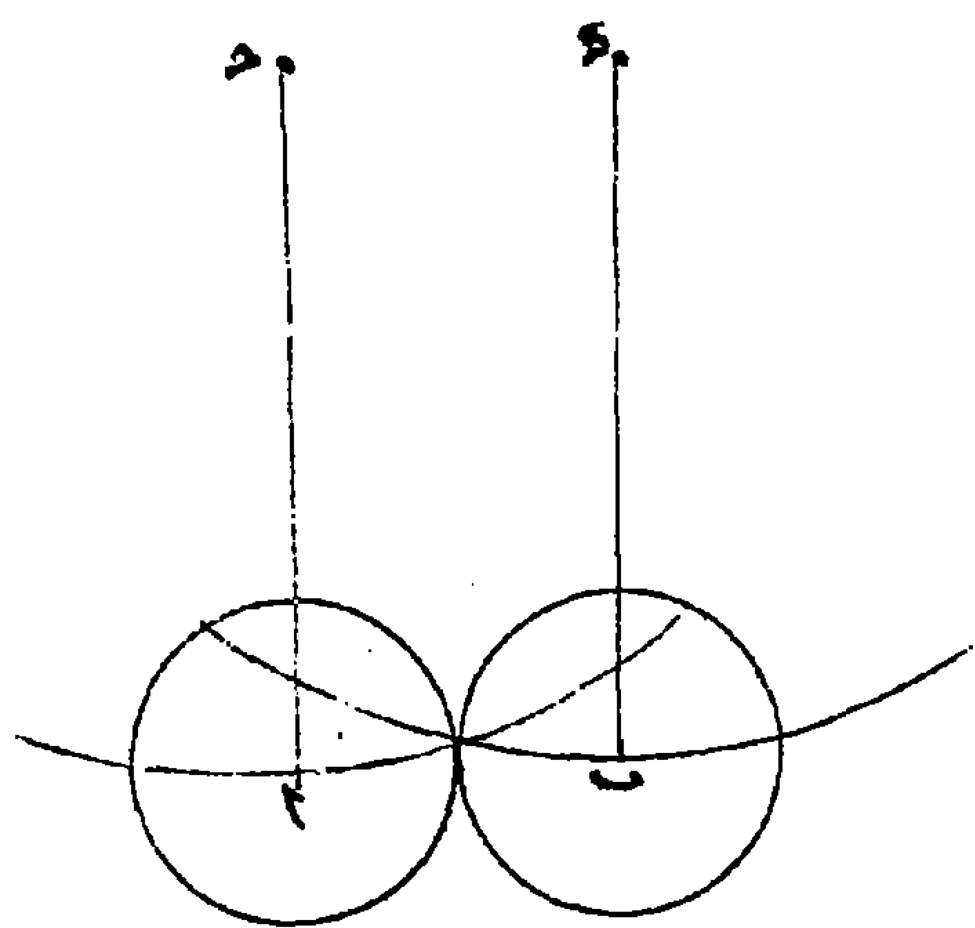
قد استعمل نوتون لتعيين مرونة المواد المختلفة الطريقة الآتية وهي

أنه علق كرتين ا، ب شكل ٨٧ في نقطتين ثابتتين ح، ء بخيطين متوازيين وجعلهما متماسين

في نهايتي

في نهايتي قطرين افقيين

وحينئذ اذا اخرجت الكرتان عن الوضع الرأسي بمقدار قوسين معلومين فأن السرعتين اللتين تتصادم بهما الكرتان المذكورتان يمكن ايجادهما كما تقدم (بموجب النتيجة الثالثة من التنبيه المذكور في بحث التحرك على منحنى)



شكل ٨٧

وبواسطة توضيب هذين القوسين بطريقة مناسبة يمكن ان تتصادم الكرتان في أوطى وضع لهما وبملاحظة القوسين اللذين ترسمهما الكرتان المذكورتان ثانيا يمكن تعيين السرعتين اللتين ينفصلان بهما بعد التصادم ويمكن بناء على ذلك تعيين معامل المرونة

وبتجاريب من هذا القبيل وجد المعلم نوتون ان معامل مرونة الكرات المجدولة من الصوف هو $\frac{٥}{٩}$ والكرات التي من الصلب نحو ذلك تقريبا والكرات التي من الفلين أقل من ذلك بقليل والعاج $\frac{٨}{٩}$ والزجاج $\frac{١٥}{١٦}$ وقد ذكر انه يلزم تصليح هذه المعاملات من الخطأ الحاصل من مقاومة الهواء

ثم اذا اخرجت الكرة ب من وضعها الاصلي وتركت لتصدم الكرة ا الساكنة فأن سرعة كل منها بعد التصادم تكون عين السرعة التي تحصل بناء على القواعد التي ذكرت في مبحث التصادم

واذا فرض ان الكرتين كانتا من خشب وكان بأحداهما عنصر صغير من الصلب يلمس كرة ا بعد التصادم فبتعديل القوسين اللذين تخرج بهما الكرتان يمكن اعطاء الكرتين المذكورتين عند التصادم سرعتين مناسبتين لعكس حجمهما وبواسطة تحميل احداهما بالرصاص يمكن جعل النسبة بين حجميهما حسب الارادة وعليه فتبقى الكرتان في سكون بعد التصادم ويفهم من ذلك ان كميتي التحرك المتساويتين والمختلفتي الجهة يتماحيان معا

والى هنا تم طبع اللازم تدريسه لتلامذة السنة الثانية من مدرسة المهندسخانة الخديوية على حسب البروجرام وعلى الله حسن الاتكال

3619